

22.1
B 53

природ. ф-т

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ



ВІСНИК

ПРИКАРПАТСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА. ХІМІЯ.

ВИПУСК 1



Івано-Франківськ
1999

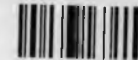
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ВІСНИК
ПРИКАРПАТСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА. ХІМІЯ.
ВИПУСК 1



НБ ПНУС



638471

Івано-Франківськ

“ПЛАЙ”

1999

638471



ББК
22.1+22.3
Б53

Вісник Прикарпатського університету. Математика. Фізика. Хімія. 1999. Вип. 1.

Автори наукових статей з природничо-математичних наук – висвітлюють актуальні проблеми в галузі математики, фізики, хімії.

Для науковців, викладачів, аспірантів, магістрів, студентів, вчителів та інженерів.

The authors of the articles on natural science and-mathematics, highlight topical problems in the field of mathematics, physics, chemistry.

For scholars, professors, post-graduate students, graduate students, students, teachers and engineers.

Редакційна рада: ГРЕЦУК Василь Васильович – доктор філологічних наук – голова ради, ВОЗНЯК Степан Михайлович – доктор філософських наук, КОНОНЕНКО Віталій Іванович – доктор філологічних наук, КУГУТЯК Микола Васильович – доктор історичних наук, ЛУЦЬ Володимир Васильович – доктор юридичних наук, МАТВІШИН Володимир Григорович – доктор філологічних наук, ОСТАФІЙЧУК Богдан Костянтинівич – доктор фізико-математичних наук, СТУПАРІК Богдан Михайлович – доктор педагогічних наук, ФІГОЛЬ Михайло Павлович – доктор мистецтвознавства, ФРЕЙК Дмитро Михайлович – доктор хімічних наук.

Редакційна колегія: ФРЕЙК Д.М. – доктор хімічних наук – голова редколегії, БОДНАР Д.І. – доктор фізико-математичних наук, ГУЦУЛЯК Б.М. – доктор хімічних наук, ЗАРІЧНИЙ М.М. – доктор фізико-математичних наук, ІВАСИШЕН С.Д. – доктор фізико-математичних наук, КАЛЕНЮК П.І. – доктор фізико-математичних наук, КЛИМИШИН І.А. – доктор фізико-математичних наук, ЛІСНЯК С.С. – доктор хімічних наук, МЕЛЬНИК П.І. – доктор технічних наук, ОСТАФІЙЧУК Б.К. – доктор фізико-математичних наук, ПТАШНИК Б.Й. – доктор фізико-математичних наук, ПИЛИПІВ В.М. – кандидат фізико-математичних наук – відповідальний секретар, РУВІНСЬКИЙ М.А. – доктор фізико-математичних наук, СОЛТИС М.М. – доктор хімічних наук, ХАБЕР М.В. – доктор технічних наук, ШИЙЧУК О.В. – доктор хімічних наук.

Адреса редакційної колегії:

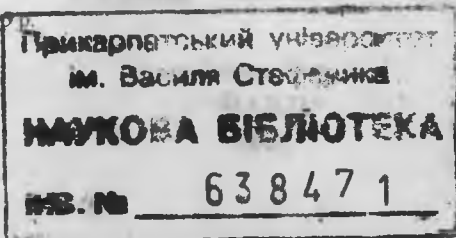
284000, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57,

Прикарпатський університет імені Василя Стефаника.

© Видавництво "Плаї" Прикарпатського університету, 1999.

Тел.: 2-33-79

Видається з 1990



МАТЕМАТИКА

Я.О.Баранецький, П.І.Каленюк, М.І.Копач, А.В.Копчук-Кашецький

СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕЛОКАЛЬНОЇ БАГАТОТЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Робота належить до спектральної теорії звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку. Знайдені власні значення оператора задачі та система власних функцій, доведено її базисність P_4 в $L_2(g)$.

This investigation deals with the spectral theory of ordinary differential equations of the 4th level and finds the meanings of the operator of the assignment and system of the functions, so does it form its P_4 's basis at $L_2(g)$.

При розгляді нелокальних багатоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь важливе місце займає вивчення спектральних властивостей цих задач. У роботах [1-4] попередньо розглянуті деякі властивості абстрактного оператора з кратним спектром (поведінка резольвенти, аналог теореми про сліди). З використанням цих результатів розглянуті спектральні властивості нелокальних задач. Дані представлення власних значень, власних і приєднаних функцій, умова їх повноти, базисності P_4 .

Нехай $L_2(G)$ - гільбертовий простір комплекснозначних функцій, інтегрованих з квадратом модуля за Лебегом на s .

$W_2^k(G)$ - простір Соболева функцій $u(x) \in L_2(G)$, для яких є скінченною норма

$$\|u\|_{W_2^k(G)}^2 = \|u\|_{L_2(G)}^2 + \|D_x^k u\|_{L_2(G)}^2 + \|D_y^k u\|_{L_2(G)}^2;$$

$$W = W_2^{2n}(0,1); W_{\pm} = \{u(x) \in W : u(x) = \pm u(1-x)\}.$$

H - комплексний гільбертовий сепарабельний простір.

Розглянемо задачу:

$$u^{(4)}(x) = f_0(x), \quad (x \in (0,1));$$

$$l_1 u \equiv u(0) + \sum_{j=1}^m a_j (u(x_j) - u(1-x_j)) = f_1;$$

$$l_2 u \equiv u(1) + \sum_{j=1}^m a_j (u(x_j) - u(1-x_j)) = f_2; \quad (2)$$

$$l_3 u \equiv u^{(2)}(0) + \sum_{j=1}^m a_j (u^{(2)}(x_j) - u^{(2)}(1-x_j)) = f_3;$$

$$l_4 u \equiv u^{(2)}(1) + \sum_{j=1}^m a_j (u^{(2)}(x_j) - u^{(2)}(1-x_j)) = f_4;$$

тут $\{a_j\}_{j=1}^m$, де $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1$.

Розв'язком задачі (1), (2) будемо називати функцію $u(x) \in W$, яка задовольняє рівняння (1) в сенсі рівності в H_0 . Нехай L - оператор даної задачі і

$$D(L) = \left\{ W \in W^4(0,1) : l_j W = 0, j = \overline{1,4} \right\}.$$

Розглянемо задачу на власні значення для оператора L :

$$y'(x) = \lambda y(x); \quad (3)$$

$$l_1 y = 0.$$

Означення. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ елементів сепарабельного гільбертового простору H утворює базу Ріса цього простору, якщо ця система є:

1) повною в H , тобто для задовільного $h \in H$ та $\epsilon > 0$ існує номер $N(\epsilon, h)$ такий, що для $q \geq N(\epsilon, h)$ знайдуться $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathbb{C}$, такі,

$$\left\| h - \sum_{i=1}^q \alpha_i e_i \right\|_H < \epsilon;$$

2) мінімальною в H , тобто існує біортогональна в H система елементів $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ таких, що:

$$(e_x, g_m)_H = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases};$$

3) якщо існують два числа $S_1, S_2 > 0$, що

$$S_1 \|h\|_H^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |h_k|^2 \right\| \leq S_2 \|h\|_H^2 \quad (4)$$

для всякого h , якому відповідає ряд $h \sim \sum_{k=1}^{\infty} h_k e_k$ і $h_k = (h, g_k)_H$.

При цьому, якщо $e_k = g_k$ ($k = 1, 2, \dots$), то база Ріса є ортонормованою базою простору H .

Спектральні властивості оператора L описує наступна теорема:

Теорема. 1) оператор L має точковий спектр

$$\sigma(L) = \{\lambda_k : \lambda_k = (k\pi)^4, k = 1, 2, \dots\}$$

та систему власних функцій $V_k(x)$, ($k = \overline{1, n}$) виду:

$$V_{2p-1}(x) = \sqrt{2} \sin(2p-1)\pi x \quad (5)$$

$$V_{2p}(x) = \sqrt{2} \sin(2p)\pi x + \sqrt{2}\alpha_p \cos 2p\pi x,$$

$$\text{де } \alpha_p = -2 \sum_{j=1}^m a_j \sin 2p\pi x_j, \quad (p=1,2,\dots);$$

2) система $V(L)$ власних функцій оператора L утворює базу

Рісса в $L_2(0,1)$.

Доведення. Шляхом безпосередньої підстановки можна переконатися, що функції

$$V_{2p-1}(x) = \sqrt{2} \sin(2p-1)\pi x \quad (p=1,2,\dots)$$

задовольняють однорідні умови

$$\tilde{l}_1 u = \frac{u(0) - u(1)}{2} = 0,$$

$$\tilde{l}_2 u = \frac{u(0) + u(1)}{2} + \sum_{j=1}^m a_j (u(x_j) - u(1-x_j)) = 0,$$

$$\tilde{l}_3 u = \frac{u'(0) - u'(1)}{2} = 0,$$

$$\tilde{l}_4 u = \frac{u'(0) + u'(1)}{2} + \sum_{j=1}^m a_j (u'(x_j) - u'(1-x_j)) = 0.$$

тобто належать $D(L)$. Підставляючи в (3), отримаємо:

$$V_{2p-1}^{(4)}(x) = \lambda_{2p-1} \cdot V_{2p-1}(x),$$

$$\lambda_{2p-1} = \pi^4 (2p-1)^4, \quad (p=1,2,\dots).$$

Отже, частина власних значень та власних функцій побудована.

Розглянемо функції виду:

$$\sqrt{2} \sin 2p\pi x + \alpha_p \sqrt{2} \cos 2p\pi x, \quad (p=1,2,\dots). \quad (6)$$

Для довільного $\alpha_p \in \mathbb{R}$ ця функція є розв'язком рівняння:

$$W^{(4)}(x) = (2p\pi)^4 W, \quad (p=1,2,\dots):$$

Визначимо таке значення α_p , при якому (6) належить $D(L)$.

Для визначення α_p отримаємо умови:

$$\alpha_p \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}(1+1) + \sqrt{2} \sum_{j=1}^m a_j (\sin 2p\pi x_j - \sin 2p(1-x_j)) = 0.$$

Оскільки

$$\sin 2p(1-x_j) = -\sin 2p\pi x_j, \text{ то } \alpha_p = -2 \sum_{j=1}^m a_j \sin 2p\pi x_j.$$

Отже функції виду (5) є власними функціями оператора L , що відповідають точковому спектру $\sigma(L)$ цього оператора. Таким чином перша частина теореми доведена.

Покажемо спочатку повноту системи $V(L)$ в $L_2(0,1)$.

Оскільки $L_2(0,1)$ - гільбертовий простір, то для повноти системи достатньо показати її тотальність, тобто, що з умови

$$(V_k, h)_{L_2(0,1)} = 0 \quad (k=1,2,\dots) \quad (7)$$

випливає, що $h=0$.

Легко переконатися, що система $\{V_{2p}(x)\}_{p=1}^{\infty}$ є ортонормованою базою в $\pi_0(J) \cdot L_2(0,1)$. Тому з (7) випливає, що $h \in \pi_1(J)L_2(0,1)$.

$$\text{Отже, } (V_{2p}, h)_0 = (V_{2p}^0, h)_0 + (\alpha_p \cos 2p\pi x, h)_0 = (V_{2p}^0, h)_0 = 0.$$

З останньої рівності та повноти системи $V_{2p}^0 = \sin 2p\pi x$ в просторі

$\pi_1(J) \cdot L_2(0,1)$ випливає, що $h(x)=0$. Отже, $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ повна в H .

Для доведення мінімальності $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2(0,1)$ побудуємо біортогональну систему $\{Z_k(x)\}$ у вигляді

$$Z_{2m}(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi m x, \quad (8)$$

$$Z_{2m-1}(x) = \sqrt{2} \sin(2m-1)\pi x + \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_{pm} \sqrt{2} \sin 2p\pi x.$$

Підставивши в умови біортогональності

$$(V_k, Z_m)_0 = \delta_{km} \quad (k, m = 1, 2, \dots), \text{ отримаємо:}$$

$$(\sin 2p\pi x + \alpha_p \cos 2p\pi x, \sin(2m-1)\pi x + \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_{pm} \sin 2p\pi x)_0 = 0, \quad (9)$$

$$\gamma_{p,m} \equiv \alpha_p (\cos 2p\pi x, \sin(2m-1)\pi x)_0.$$

Отже, параметри γ_{pm} ($p, m = 1, 2, \dots$) однозначно виражені співвідношеннями (9).

З існування біортогональної системи випливає, що $V(L)$ мінімальна в $L_2(0,1)$.

Залишилось тільки показати нерівність (4) для нашого випадку.

$$\text{Нехай } h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k V_k.$$

Оцінимо

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} h_k V_k \right\|_0^2 &= \left\| \sum_{p=1}^{\infty} h_{2p-1} V_{2p-1} + h_{2p} V_{2p} \right\|_0^2 \leq 2 \left\| \sum_{p=1}^{\infty} h_{2p-1} V_{2p-1} \right\|_0^2 + \left\| \sum_{p=1}^{\infty} h_{2p} V_{2p} \right\|_0^2 \leq \\ &\leq 2 \sum_{p=1}^{\infty} |h_{2p}|^2 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} |h_{2p}|^2 (1 + |\alpha_p|^2) \leq S_1^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} |h_{2p}|^2 + |h_{2p-1}|^2, \text{ де } S_1^{-1} \geq 2 \max_p \{1 + |\alpha_p|^2\} \end{aligned}$$

Ліва частина нерівності (4) доведена.

Розглянемо оператор $R: L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1)$ такий, що

$$R V_k^0 = V_k \quad (k = 1, 2, \dots). \text{ Легко переконатися, що:}$$

$$R = E + R_1, \quad (10)$$

$$R_1: \pi_1(J)L_2(0,1) \rightarrow \pi_0(J)L_2(0,1),$$

$$R_1: \pi_0(J)L_2(0,1) \rightarrow 0, \text{ тобто } (R_1)^2 = 0.$$

Покажемо, що R - обмежений оператор.

$$\begin{aligned} \|R\Phi\|_0^2 &= \left\| R \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k V_k^0 \right\|_0^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k R V_k^0 \right\|_0^2 \leq 2 \left(\left\| \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{2p} V_{2p} \right\|_0^2 + \left\| \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{2p-1} V_{2p-1}^0 \right\|_0^2 \right) \leq \\ &\leq 2 \left(\|\pi_0(J)\Phi\|_{L_2(0,1)}^2 \right) + \left(1 + \max_p |\alpha_p|^2 \right) \|\pi_0(J)\Phi\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \left(1 + \max_p |\alpha_p|^2 \right) \cdot \|\Phi\|_{L_2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \|R\|^2 \leq S_1^{-1}, \text{ тоді } \|R_1\|^2 = \|R_1 + E - E\|^2 \leq 2(1 + \|R\|^2) \leq 2(1 + S_1^{-1}).$$

Оскільки $R_1^2 = 0$, то $R^{-1} = E - R$,

$$\|R^{-1}\|^2 = \|E - R_1\|^2 \leq 2(1 + \|R_1\|^2) \leq 2(1 + 2(1 + S_1^{-1})) = S_2.$$

З означення R та біортогональної системи маємо:

$$Z_k(x) = (R^{-1})^* V_k^0.$$

Тому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |h_k|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |(h_1 (R^{-1})^* V_k^0)|_{L_2(0,1)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(R^{-1} h_1 V_k^0)|_{L_2(0,1)}^2 = \|R^{-1} h\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \\ &\leq S_2 \|h\|_{L_2(0,1)}^2 \end{aligned}$$

Отже, нерівність Бесселя (4), а з нею і другу частину теореми, доведено.

1. Баранецкий Я. Е. Нелокальная задача для дифференциально-операторных уравнений чётного порядка // Материалы второй конф. молодых учёных ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР. – Львов, 1985. – С. 3-12.

2. Баранецкий Я. Е. Краевая задача для дифференциально-операторных уравнений чётного порядка // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – К.: Наук. думка, 1989. – С. 13-18.

3. Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е. Многопараметрические нелокальные спектральные задачи для операторно-дифференциальных уравнений // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1990. – Вып. 32. – С. 26-30.

4. Рахимов М. Р. О базисности Рисса систем собственных и присоединённых элементов дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1987. – №3. – С.528-540.

Г.П.Малицька

ПРО ДОДАТНІ РОЗВ'ЯЗКИ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ.

У статті вивчаються додатні розв'язки задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу рівнянь Колмогорова.

In this paper we study the positive solutions of Cauchy problem for the degenerated parabolic equations of Kolmogorov type.

Нехай $\Omega_0 = R_s \times (0, T]$, $\Omega = R_s \times [0, T]$, $s = n + m + \ell$.

Будемо вважати: $u(\rho, t)$ неперервна в Ω , $\rho = (x, y, z)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $z = (z_1, \dots, z_\ell)$, $n \geq m \geq \ell$.

Розглянемо оператор [1]

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\rho, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\rho, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{\ell} y_i \frac{\partial u}{\partial z_i} - \frac{\partial u}{\partial t} + c(\rho, t)u, \quad (1.1)$$

A) $\mu |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\rho, t) \xi_i \xi_j \leq \mu^{-1} |\xi|^2$, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$, $(\rho, t) \in \Omega_0$;

B) коефіцієнти оператора L задовольняють такі умови:

$a_{ij}(\rho, t)$ - неперервні, обмежені по (ρ, t) , задовольняють рівномірну умову Гельдера по x , раз неперервно диференційовні по y, z , частинні похідні обмежені.

Лема. Нехай оператор L задовольняє умови (A), (B) в Ω , і нехай $c(\rho, t)$ - обмежена зверху функція. Якщо $Lu \leq 0$ в Ω_0 , $u(\rho, 0) \geq 0$ в R_s і рівномірно по t ($0 \leq t \leq T$) існує $\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} u(\rho, t) \geq 0$, то $u(\rho, t) \geq 0$ в Ω .

Доведення. Можна вважати, що $c(\rho, t) \leq 0$, якщо ні, то ми спочатку зробимо перетворення $v = ue^{-\gamma t}$, де $\gamma \geq c$.

Для $\forall \epsilon > 0$ $u(\rho, t) + \epsilon > 0$ при $t=0$, а також при $|\rho| = r$, $0 \leq t \leq T$, якщо тільки r досить велике. Оскільки $L(u + \epsilon) \leq \epsilon c \leq 0$, то $u(\rho, t) + \epsilon > 0$, при $|\rho| \leq r$ і $0 \leq t \leq T$ [2]. Зафіксувавши (ρ, t) і спрямувавши ϵ до 0, одержимо, що $u(\rho, t) \geq 0$, тобто $u(\rho, t) \geq 0$ в Ω .

У подальшому викладенні нам знадобляться і такі умови на коефіцієнти:

$$(r,t)OW_0, |a_{ij}(r,t)| \leq M, |b_i(r,t)| \leq M(|r|+1), c(r,t) \leq M(|r|^2+1). \quad (1.2)$$

Теорема 1. Нехай L - оператор (1.1) в Ω_0 , коефіцієнти неперервні й задовольняють умови (1.2). Нехай $Lu \leq 0$ в Ω , а також

$$u(\rho, t) \geq -\text{Вexp}[\beta|\rho|^2] \text{ в } \Omega \quad (1.2')$$

для деяких додатних B і β . Якщо $u(\rho, 0) \geq 0$ в R_s , то $u(\rho, t) \geq 0$ в Ω .

Доведення. Розглянемо функцію

$$H(\rho, t) = \text{exp} \left[\frac{k|\rho|^2}{1-\mu t} + \nu t \right], \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2\mu}. \quad (1.3)$$

Вона задовольняє рівність

$$\begin{aligned} \frac{LH}{H} &= \frac{4k^2}{(1-\mu t)^2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\rho, t) x_i x_j + \frac{2k}{1-\mu t} \sum_{i=1}^n a_i x_i + \frac{2k}{1-\mu t} \sum_{i=1}^n b_i x_i + \\ &+ \frac{2k}{1-\mu t} \sum_{i=1}^m x_i y_i + \frac{2k}{1-\mu t} \sum_{i=1}^l y_i z_i + c - \frac{\mu k |\rho|^2}{(1-\mu t)^2} - \nu. \end{aligned}$$

Враховуючи (1.2), одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{LH}{H} &\leq (16k^2 M + 8knM + M - \mu k + (m+1)4k) \rho^2 + \\ &+ (8knM + M - \nu). \end{aligned}$$

Отже, для будь-якого $k > 0$ ми можемо підібрати такі досить великі додатні числа μ і ν , що буде справедливою нерівність:

$$\frac{LH}{H} \leq 0. \quad (1.4)$$

Розглянемо функцію v , що визначається рівністю $u = Hv$, де H визначена за формулою (1.3). З фіксованим $k > \beta$ і з μ і ν , при яких виконується (1.4), для $0 \leq t \leq 1/2\mu$ із нерівності $u(\rho, t) \geq -\text{Вexp}[\beta|\rho|^2]$

впливає існування $\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} v(\rho, t) \geq 0$ рівномірно по t , $0 \leq t \leq \frac{1}{2\mu}$.

Функція v задовольняє рівняння

$$\bar{L}v = \sum_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij} + \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \bar{c}v + \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial v}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^l y_i \frac{\partial v}{\partial z_i} - \frac{\partial v}{\partial t} = \bar{f},$$

$$\text{де } \bar{f} = \frac{Lu}{M} \leq 0, \quad \bar{b}_i = b_i + 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} H^{-1}, \quad \bar{c} = \frac{LH}{H}.$$

Внаслідок (1.4), $\bar{c} \leq 0$, тому, в силу леми, одержимо, що $v(\rho, t) \geq 0$, а отже $u(\rho, t) \geq 0$ в $R_s \times [0, T]$.

Подальше доведення додатності $u(\rho, t)$ в Ω здійснюється крок за кроком, аналогічно до попереднього.

Із теореми 1 одержуємо теорему 2 про єдиність розв'язків задачі Коші.

Теорема 2. Нехай коефіцієнти рівняння (1.1) неперервні в $R_s \times [0, T]$, для яких виконуються умови (A), (1.2). Тоді існує не більше одного розв'язку задачі Коші

$$Lu = f(\rho, t) \text{ в } R_s \times [0, T], \quad u(\rho, 0) = \varphi(\rho) \text{ в } R_s, \quad (1.5)$$

який задовольняє умову

$$|u(\rho, t)| \leq B \text{exp}[\beta|\rho|^2], \quad (1.6)$$

при деяких додатних сталих B, β .

Доведення. Потрібно показати, що $u \equiv 0$, якщо $f(\rho, t) \equiv 0$ і $\varphi(\rho) \equiv 0$.

Застосовуючи теорему 1 до $u(\rho, t)$ і $-u(\rho, t)$, одержимо доведення теореми.

Наведемо інше застосування принципу максимуму [2].

Доведемо теорему єдиності для розв'язків, які задовольняють тільки деяку умову обмеженості знизу. Але спочатку встановимо загальну властивість фундаментального розв'язку $\Gamma(\rho, t; M, \tau)$ за умови, що фундаментальний розв'язок існує для (1.1).

Теорема 3. Якщо $\Gamma(\rho, t; M, \tau)$ - фундаментальний розв'язок (1.1), то $\Gamma(\rho, t; M, \tau)$ - додатна функція.

Доведення. Для будь-якої невід'ємної неперервної в R_s функції $f(\rho)$ з компактним носієм визначимо функцію

$$v(\rho, t) = \int_{R_s} \Gamma(\rho, t; M, \tau) f(M) dM.$$

Оскільки $Lv = 0$ при $\tau \leq t \leq T$, $v(\rho, \tau) = f(\rho) \geq 0$ і $\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} v(\rho, \tau) \geq 0$, то, в силу леми, маємо, що $v(\rho, t) \geq 0$.

Візьмемо послідовність неперервних невід'ємних функцій $\{f_m(\rho)\}$

таких, що $f_m(\rho)=0, |\rho - M^0| \geq \frac{1}{m}, \int_{R_1} f_m(M) dM = 1.$

Наприклад, $f_m = P_{\frac{1}{m}}(\rho - \rho^0)$, де

$$P_{\epsilon}(\rho) = \begin{cases} 0, & |\rho| \geq \epsilon, \\ \frac{K}{\epsilon^3} \exp\left[-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - |\rho|^2}\right], & |\rho| < \epsilon. \end{cases}$$

Позначимо за $v_m(\rho, t)$ функцію $v(\rho, t)$, що відповідає $f=f_m, \tau=\tau^0$. Тоді для будь-яких фіксованих $(\rho^0, t^0), (M^0, \tau^0) t^0 > \tau^0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} v_m(\rho^0, t^0) = \Gamma(\rho^0, t^0; M^0, \tau^0).$$

Оскільки $v_m(\rho^0, t^0) \geq 0$ для всіх m , то $\Gamma(\rho^0, t^0; M^0, \tau^0) \geq 0$, враховуючи, що при будь-яких фіксованих $(M, \tau) \Gamma(\rho, t; M, \tau) \neq \text{const}$ і використовуючи теорему про слабкий принцип максимуму, одержимо строгу додатність $\Gamma(\rho, t; M, \tau)$.

Для деяких вироджених параболічних рівнянь функція $\Gamma(\rho, t; M, \tau)$ не тільки додатна, але й задовольняє нерівність

$$\Gamma(\rho, t; M, \tau) \geq \text{сexp}\left\{-\gamma\left(|x - \xi|^2 + |y - \eta + x(t - \tau)|^2 + |z - \zeta + \frac{y(t - \tau)}{2} + \frac{x(t - \tau)^2}{12}\right|^2\right\}, \quad (1.7)$$

або

$$\Gamma(\rho, t; M, \tau) \geq \text{сexp}\left\{-\gamma\left(|x - \xi|^2 + |y - \eta + \xi(t - \tau)|^2 + |z - \zeta + \eta(t - \tau) + \frac{\xi(t - \tau)^2}{12}\right|^2\right\},$$

якщо $(t - \tau) > \delta$.

Більш груба оцінка:

$$\Gamma(\rho, t; M, \tau) \geq \text{сexp}\left\{-\gamma\left(|\rho - M|^2 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)\right\},$$

або $\Gamma(\rho, t; M, \tau) \geq \text{сexp}\left\{-\gamma\left(|\rho - M|^2 + |x|^2 + |y|^2\right)\right\}$, де C, γ - додатні сталі, залежні від δ . Це впливає із явного вигляду фундаментального розв'язку для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^l y_i \frac{\partial u}{\partial z_i} = \Delta u. \quad (1.8)$$

Зауважимо: якщо Γ -фундаментальний розв'язок рівняння (1.1), то для будь-якої гладкої функції $f(\rho, t)$, що задовольняє умову

$$|f(\rho, t) - f(M, \tau)| = o(|\rho - M|^2), \text{ коли}$$

$$|\rho - M| \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

функція $\Gamma'(\rho, t; M, \tau) = \Gamma(\rho, t; M, \tau) \text{exp}\{-f(\rho, t) + f(M, \tau)\}$ є фундаментальним розв'язком рівняння

$$L'v = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \left(b_i + 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \left(c + \sum_{j=1}^n b_j f_{x_j} + \sum_{j=1}^m x_j f_{y_j} + \sum_{j=1}^l y_j f_{z_j} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} f_{x_i x_j} - f_i \right) v - \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Якщо оцінка (1.7) справедлива для $\Gamma(\rho, t; M, \tau)$, то таку оцінку буде мати і $\Gamma'(\rho, t; M, \tau)$. Взявши в якості $Lv=0$ рівняння (1.8) і беручи за

$$f(\rho, t) = f(x, t) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{x_i}{2},$$

дійдемо висновку, що $\Gamma(\rho, t; M, \tau)$ - фундаментальний розв'язок рівняння

$$\Delta u + \sum_{i=1}^n b_i \frac{x_i}{2} = \sum_{i=1}^m x_i u'_{y_i} + \sum_{i=1}^l y_i u'_{z_i} + u'_t - \text{задовольняє (1.7). Узгодженим}$$

лінійним перетворенням по x, y, z можна показати, що

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^l y_i \frac{\partial u}{\partial z_i} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$a_{ij} = \text{const}, \quad b_i = \text{const},$$

має фундаментальний розв'язок, який задовольняє (1.7).

Якщо оцінка (1.7) виконується для $\Gamma(\rho, t; M, \tau)$ рівняння $Lu=0$, то вона справедлива для фундаментального розв'язку $\Gamma_c(\rho, t; M, \tau)$ рівняння $(L+e)u=0$ при будь-якій додатній функції e .

Дійсно, розглянемо функцію

$$v(\rho, t) = \int_R [\Gamma(\rho, t; M, \tau) - \Gamma_c(\rho, t; M, \tau)] f(M) dM,$$

де $f(M)$ така, як у доведенні теореми 3.

Далі $\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} v(\rho, t) = 0$; $v(\rho, 0) = 0$, оскільки $L(\Gamma - \Gamma_c) = L\Gamma - (L+e)\Gamma_c + e\Gamma_c = e\Gamma \geq 0$. Звідси випливає, що $Lv \geq 0$, в силу леми, $v(x, t) \leq 0$ при $\tau < t \leq T$. Вибираючи послідовність $\{f_m\}$ таку, як у доведенні теореми 3, доходимо висновку, що $\Gamma - \Gamma_c \leq 0$, а отже Γ_c задовольняє (1.7).

Оскільки перетворення $u = ve^{-\lambda t}$ переводить рівняння $Lu=0$ в рівняння $(L+\lambda)v=0$, а фундаментальний розв'язок $\Gamma(\rho, t; M, \tau)$ в $e^{-\lambda(t-\tau)}\Gamma(\rho, t; M, \tau)$ - фундаментальний розв'язок рівняння $(L+e)v=0$, отже (1.7) зберігається для будь-якого рівняння $(L+e)$ з обмеженою диференційовною функцією e .

Теорема 4. Нерівність (1.7) справедлива і для рівняння

$$Lu = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^l y_i \frac{\partial u}{\partial z_i} - \frac{\partial u}{\partial t} + cu = 0, \quad (1.10)$$

$$a_{ij} = \text{const}, \quad b_i = \text{const},$$

$c(\rho, t)$ - обмежена, раз диференційовна функція.

Доведемо теорему єдиності для розв'язків задачі Коші, обмежених знизу.

Теорема 5. Нехай оператор L задовольняє в Ω умови існування фундаментального розв'язку і виконується (1.7). Якщо $Lu=0$ в Ω_0 , $u(\rho, 0) \equiv 0$ в R_0 і $u(\rho, t)$ задовольняє умову (1.2') при деяких додатних сталих V, β , то $u(\rho, 0) \equiv 0$ в Ω .

В силу теореми 4, одержимо такий наслідок.

Наслідок 1. Якщо $u(\rho, t)$ - розв'язок рівняння (1.10) в Ω_0 і $u(\rho, 0) \equiv 0$ в R_0 і виконується (1.2'), то $u(\rho, t) \equiv 0$ в Ω .

Доведення теореми 5. Із теореми 1 випливає, що $u(\rho, t) \geq 0$ в Ω . Для будь-якого $R > 0$ введемо функцію

$$V_R(\rho, t) = \int_{|M| \leq R} \Gamma(\rho, t; M, \tau) u(M, \tau) dM.$$

Із пластивостей фундаментального розв'язку випливає, що $V_R(\rho, t) \rightarrow u(\rho, \tau)$, якщо $|\rho| = R$ і $V_R(\rho, t) \rightarrow 0$, коли $|\rho| > R$. Оскільки $V_{R+1}(\rho, t) \rightarrow u(\rho, t)$, якщо $|\rho| = R$ і $V_R < V_{R+1}$ (оскільки $\Gamma > 0$ і $u \geq 0$), то для будь-якого $Y \in R$, $\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} V_R \leq u(Y, t)$, якщо $\rho \rightarrow Y, t \rightarrow \tau$.

Тому функція $v(\rho, t) = u(\rho, t) - V_R(\rho, t)$ задовольняє нерівність $\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} v(\rho, t) \geq 0$. Оскільки $V_R(\rho, t) \rightarrow 0$ рівномірно по $0 < t \leq T$, $u(\rho, t) \geq 0$ в Ω , то $\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} u(\rho, t) \geq 0$ рівномірно по t ($0 < t \leq T$).

Звідси, в силу леми, маємо $v(\rho, t) \geq 0$, тобто

$$\int_{|M| < R} \Gamma(\rho, t; M, \tau) u(M, \tau) dM \leq u(\rho, t). \quad (1.11)$$

Ця нерівність справедлива при $R > 0$ і підінтегральний вираз невід'ємний, тому

$$\int_{R_0} \Gamma(\rho, \tau; M, t) u(M, \tau) dM \leq u(\rho, t). \quad (1.12)$$

Взявши $\rho=0$ і інтегруючи по τ , одержимо

$$\int_0^{t-\delta} \int_{R_0} \Gamma(0, t; M, \tau) u(M, \tau) dM \leq u(0, t)(t-\delta).$$

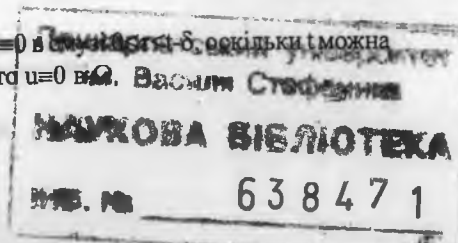
В якості δ можна взяти будь-яке додатне число менше t . З допомогою (1.7) одержуємо $\int_0^{t-\delta} \int_{R_0} \exp\{-\gamma|\rho|^2\} u(\rho, \tau) d\rho d\tau < \infty$.

Використовуючи таку теорему: нехай оператор (1.1) заданий в області Ω , тоді існує не більше одного розв'язку задачі Коші, що задовольняє умову

$$\int_0^T \int_{R_0} |u(\rho, t)| \exp\{-K|\rho|^2\} d\rho dt < \infty,$$

при деякому сталому K ;

або, в силу теореми 3, одержимо $u(\rho, t) \equiv 0$ в Ω , якщо δ можна вибрати як завгодно близьким до T , то $u \equiv 0$ в Ω .



А.І.Казмерчук

Наслідок 2. Якщо $Lu=0$ в Ω_0 і $u(\rho,t) \geq 0$ в Ω , то для

$$u(\rho,t) = \int_{R_+} \Gamma(\rho,t;M,0)u(M,0)dM \text{ в } \Omega_0. \quad (1.13)$$

Теорема 5 залишається справедливою при умові

$$\Gamma(0,t;M,\tau) \geq A \exp\{-\beta|M|^2\}, M \in R_+, t - \tau > \delta,$$

$A, \beta, \delta > 0$, сталі, A, β залежать від δ .

1. Малицька Г.П., Федорів М.П. Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь //Вісник Прикарпат. ун-ту. Природничо-математичні науки. – Вип. I. – Івано-Франківськ: Плай, 1995. – С. 10-16.

2. Малицька Г.П. Про принцип максимуму для ультрапараболічних рівнянь //Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48. – №2 – С. 195-199.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РІМАНА ДЛЯ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ*

Розв'язується задача Рімана для однієї системи законів збереження в класі автомодельних розв'язків. Показано еквівалентність ентропійних умов різної структури.

Riemann problem for one system of conservation laws has been solved in the class of automodel solutions with equivalency of the entropy conditions of various structure.

Основною проблемою в теорії гіперболічних систем законів збереження

$$w_t + (G(w))_x = 0, \quad w \in R^n, \quad G \in R^n, \quad A = G'(w) \quad (1)$$

є глобальне розв'язання задачі Коші і, як частинний випадок, задачі Рімана

$$w_t + (G(w))_x = 0, \\ w|_{t=0} = \begin{cases} w_l, & x < 0, \\ w_r, & x \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Відомо, що, навіть при досить гладких даних задачі, розв'язок за скінченний час стає розривним, отже, вводять узагальнені розв'язки.

* Робота підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень Міністерства України у справах науки і технологій.

Для кусково-гладких розв'язків вздовж лінії розриву $x(t)$, що розділяє положення w_l і w_r , має виконуватись умова

$$S(w_r - w_l) = G(w_r) - G(w_l), \quad S = \dot{x}(t). \quad (3)$$

У загальному випадку умова (3) не виділяє єдиного розв'язку. Тому допустимими вважають тільки ті розриви, що задовольняють ентропійну умову

$$S(U(w_r) - U(w_l)) - (F(w_r) - F(w_l)) \geq 0, \quad (4)$$

де $U(w) \in \mathbb{R}^n, U'' > 0, F(w) \in \mathbb{R}^n$ - такі вектор-функції, що $grad U \cdot A = grad F$.

Лакс [1] ввів ентропійні розв'язки задачі (1), (2), для яких у кожному точці на лінії розриву $x(t)$ приходить рівно $n+1$ характеристик, тобто для певного $k=1, \dots, n$

$$\lambda_k(w_r) < S < \lambda_k(w_l), \quad \lambda_{k-1}(v_r) < S < \lambda_{k+1}(v_l) \quad (5)$$

і показав, що при виконанні умови $|w_r - w_l| < \epsilon$, де ϵ - досить мале число, умови (4) і (5) еквівалентні.

У даній роботі для системи одного виду показано еквівалентність ентропійних умов (4) і (5) для досить широкого класу початкових даних.

Розглянемо задачу Рімана для системи законів збереження

$$\begin{aligned} u_t + (f(v))_x &= 0, \quad f \in C^2, \\ v_t + (g(u))_x &= 0, \quad g \in C^2, \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & f'(v) \\ g'(u) & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_r, & x \geq 0 \end{cases} \quad v|_{t=0} = \begin{cases} v_l, & x < 0 \\ v_r, & x \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Припустимо, що в області $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ система (6) гіперболічна і сильно нелінійна. Це означає, що

$$\begin{aligned} f'(v) > 0, \quad g'(u) > 0, \\ -\left(\frac{1}{\sqrt{f'(v)}}\right)' \pm \left(\frac{1}{\sqrt{g'(u)}}\right)' \neq 0 \end{aligned} \quad \text{в } \Gamma.$$

$$\text{Для матриці } A: \quad U(u, v) = \int f(\xi) d\xi + \int g(\xi) d\xi, \quad F(u, v) = f(v)g(u).$$

При введених умовах виконується:

Теорема 1. Умови (4) і (5) еквівалентні.

Зауважимо, що цей результат дозволяє простим способом будувати розв'язок задачі Рімана, який відповідає математичним моделям задач газової динаміки.

Умова (5) виділяє єдиний розв'язок задачі (6), (7).

Теорема 2. Автомодельний розв'язок $(u, v) = \left(u\left(\frac{x}{t}\right), v\left(\frac{x}{t}\right)\right)$

задачі (6), (7) існує і єдиний.

Зауваження. Результат поширюється на системи виду

$$\begin{aligned} u_t + (\lambda u + f(v))_x &= 0, \\ v_t + (\lambda v + g(u))_x &= 0, \end{aligned} \quad \lambda = \text{const.}$$

1. Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws II //Comm. Pure Appl. Math. - 1957. - Vol. 10. - С. 537-566.

Н.І.Білусяк, Б.Й.Пташник.

ЗАДАЧА З УМОВАМИ ТИПУ УМОВ ДІРІХЛЕ ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Досліджена задача з умовами типу умов Діріхле за часовою змінною та умовами періодичності за часовою координатою для слабконелінійних гіперболічних рівнянь порядку $2n$, $n \geq 2$.

Встановлено умови існування єдиного розв'язку цієї задачі для майже всіх (відносно міри Лебега) коефіцієнтів рівняння і параметрів області.

Under study is a problem of Dirichlet-type conditions with the time variables and conditions of periodicity under the patial coordinates for weak nonlinear hyperbolic equations of the $2n$, $n \geq 2$ order.

It has been stated that there are conditions for the unique solution of the problem for almost all (with respect to Lebesgue measure) ratios of the equation and the parameters of its domain.

ВСТУП

Задачі з даними на всій границі області для гіперболічних та безтипних рівнянь почали досліджуватись порівняно недавно. Це, очевидно, пов'язано з тим, що такі задачі – умовно коректні, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників. Таким задачам для лінійних рівнянь присвячені роботи [1–11] (див.

бібліографію в [10]). У даній роботі, яка є продовженням [9] і близька до робіт [12–15], досліджено класичну розв'язність крайової задачі з даними на всій границі області для слабконелінійних гіперболічних рівнянь порядку $2n$ ($n \geq 2$) із двома незалежними змінними.

1. В області $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq T, x \in \Omega\}$, Ω – коло одиничного радіуса, розглянемо задачу

$$L[u] = \sum_{s=0}^n a_s \frac{\partial^{2n} u(t, x)}{\partial t^{2(n-s)} \partial x^{2s}} = \varepsilon f(t, x, u(t, x)) + \Phi(t, x), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^{2l} u(t, x)}{\partial t^{2l}} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^{2l} u(t, x)}{\partial t^{2l}} \Big|_{t=T} = 0, l = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

до $a_s \in \mathbb{R}, s=0, 1, \dots, n, a_0 \neq 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$; оператор L строго гіперболічний за Петровським, тобто всі корені λ рівняння

$$\sum_{s=0}^n a_s \lambda^{2(n-s)} = 0 \quad (3)$$

дійсні та різні; функція $f(t, x, u)$ визначена і неперервна за змінною t та досить гладка за x , u в області $D_1 = \{(t, x, u) : (t, x) \in D, u \in \bar{S}\}$, де $\bar{S} = \bar{S}(u^0, r) = \{u \in C^{2n}(D) : \|u - u^0\|_{C^{2n}(D)} \leq r\}$, $u^0 = u^0(t, x)$ – розв'язок задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$; $\Phi \in C^{(0,3)}(D)$.

Вигляд області D накладає умови 2π -періодичності за змінною x на функції $u(t, x), f(t, x, u(t, x)), \Phi(t, x)$.

2. Розглянемо незбурену задачу (1), (2) (коли $\epsilon = 0$), яка є частинним випадком задачі, дослідженої в [9].

Нехай $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$ – додатні корені рівняння (3). Із теореми 1 в [9] випливає, що задача (1), (2) при $\epsilon = 0$ має не більше одного розв'язку тоді й тільки тоді, коли всі числа $\frac{\lambda_j T}{\pi}, j = 1, 2, \dots, n$ – ірраціональні.

Нехай виконується умова єдиності розв'язку незбуреної задачі (1), (2). Тоді її розв'язок $u^0(t, x)$ зображається рядом

$$u^0(t, x) = \sum_{k \in Z_0} \int_0^T G_k(t, \tau) \Phi_k(\tau) d\tau \exp(ikx), \quad (4)$$

де $\Phi_k(t)$ – коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є за змінною x функції $\Phi(t, x)$, а $G_k(t, \tau), k \in Z$, – функції Гріна задач

$$\sum_{s=0}^n a_s (ik)^{2s} u_k^{(2n-2s)}(t) = 0, l_j[u_k(t)] = u_k^{(2j)}(0) = 0; \\ l_{n+j}[u_k(t)] = u_k^{(2j)}(T) = 0, j = 0, \dots, n-1.$$

У квадраті $K_T = \{(t, \tau) \in R^2 : 0 \leq t, \tau \leq T\}$ (за винятком сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$) функції $G_k(t, \tau)$ визначаються формулами

$$G_k(t, \tau) = \frac{\text{sign}(t-\tau)}{4} \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{\sigma+n} \alpha(\gamma_s(t-\tau))}{\gamma_s \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^n (\gamma_r^2 - \gamma_s^2)} + \\ + \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^\sigma \frac{\gamma_r^{2s-3} (\alpha(\gamma_r \tau) \alpha(\gamma_j(T-t)) + (-1)^n \alpha(\gamma_r(\tau-T)) \alpha(\gamma_j t)) S_{n-s}^j}{4 \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq r}}^n (\gamma_m^2 - \gamma_r^2) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n (\gamma_m^2 - \gamma_j^2) \alpha(\gamma_j T)}, \\ k \in Z \setminus \{0\} \quad (5)$$

$$G_0(t, \tau) = \frac{\text{sign}(t-\tau)}{2(2n-1)} (t-\tau)^{2n-1} + \\ + (2n-2)! \prod_{m=1}^{2n-1} (m!) \Gamma^{-n} \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{2n} (-1)^{n+j+s} t^{s-1} \Delta_{js} \frac{\tau^{2n-2j+1} + (-1)^n (t-\tau)^{2n-2j+1}}{2(2n-2j+1)!}, \quad (6)$$

де $\gamma_j = i\lambda_j k, \sigma = \frac{n(n-1)}{2}, \alpha(y) = \exp(-y) - \exp(y), S_{n-s}^{(j)}$ – сума всяких можливих добутоків елементів $\lambda_1^2, \dots, \lambda_{j-1}^2, \lambda_{j+1}^2, \dots, \lambda_n^2$, взятих у кількості $n-s$ ($S_0^{(j)} = 1$), а Δ_{js} – алгебраїчне доповнення у визначнику $\det \|l_j[t^{s-1}]\|_{j,s=1}^n$ елемента, що стоїть на перетині j -го рядка і s -го стовпця. На стороні $\tau = 0$ ($\tau = T$) квадрата K_T функцію $G_k(t, \tau)$ доповнимо за неперервністю справа (зліва).

Із формул (5), (6) випливає справедливості таких оцінок

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^q}{\partial t^q} \int_0^T G_k(t, \tau) d\tau \right| \leq |k|^{-2n+1+q} \left(TC_1 + \bar{A} T n^2 \sum_{j=1}^n \bar{C}_j |1 - \exp(2\gamma_j T)|^{-1} \right), \\ q = 0, \dots, 2n, k \neq 0, \quad (7)$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^q}{\partial t^q} \int_0^T G_0(t, \tau) d\tau \right| \leq \lambda_0, \lambda_0 = \text{const}, \quad (8)$$

$$\text{де } C_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\lambda_j^{-1} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n |\lambda_r^2 - \lambda_j^2|^{-1} \right),$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \max_{q,s,r=1,n} \left| \lambda_r^{2s-3} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq r}}^n (\lambda_m^2 - \lambda_r^2)^{-1} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq q}}^n (\lambda_m^2 - \lambda_q^2)^{-1} \right|, \quad \bar{C}_j = \max_{0 \leq r \leq n-1} |S_r^{(j)}|.$$

Існування розв'язку задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$ пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників, бо вирази $|1 - \exp(2\gamma_j T)|$, $j = 1, 2, \dots, n$ можуть приймати як завгодно малі значення для нескінченного числа $k \in \mathbb{Z}$.

Лема. Для майже кожного (відносно міри Лебега в \mathbb{R}) числа $\beta = \frac{\lambda T}{\pi}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ряд

$$\sum_{|k|>0} |k|^{-s} |1 - \exp(2i\lambda k T)|^{-1} \quad (9)$$

є збіжним при $s \geq 3$.

Доведення. Враховуючи нерівність $\sin x \geq 2x/\pi$, яка виконується для всіх $x \in [0, \pi/2]$, отримуємо

$$|1 - \exp(2i\lambda k T)| = |2\sin(\lambda k T)| \geq 4|\lambda| |k| T / \pi - d(k) = 4|\beta| |k| - d(k), \quad (10)$$

де $d(k)$ – ціле число, для якого $|\beta| |k| - d(k) \leq \frac{1}{2}$. Оскільки оцінка (10) виконується для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$, то, згідно з лемами 1 і 2 із [1], ряд (9) є збіжним для майже кожного (відносно міри Лебега в \mathbb{R}) числа $\lambda T / \pi$ при $s \geq 3$.

Теорема 1. Нехай $n \geq 2$, і нехай всі числа $\lambda_j T / \pi$, $j = 1, \dots, n$ – ірраціональні. Якщо $\Phi(t, x) \in C^{(0,3)}(D)$, то для майже кожного (відносно міри Лебега) числа $\lambda_r T / \pi$, $r = 1, \dots, n$ існує розв'язок $u^0(t, x) \in C^{2n}(D)$ незбуреної задачі (1), (2), який зображається рядом (4) і неперервно залежить від функції $\Phi(t, x)$.

Доведення здійснюється за схемою доведення теореми 1 із [12]; при цьому отримана оцінка $\|u^0\|_{C^{2n}(D)} \leq \rho_1$, де

$$\rho_1 = \|\Phi\|_{C^{2n}(D)} T \left(\sum_{q=0}^{2n} D_{q-3} + A n^2 \sum_{q=0}^{2n} B_{q-3} + \frac{\lambda_0}{T} \right),$$

$$D_q = C_1 \sum_{|k|>0} |k|^{q-2n+1}, B_q = \sum_{|k|>0} \sum_{j=1}^n \bar{C}_j |k|^{-2n+1+q} |1 - \exp(2\gamma_j T)|^{-1}, j = -3, -2, 0, \dots, 2n-3. \quad (11)$$

1. Розглянемо задачу (1), (2), коли $\varepsilon \neq 0$. У цьому випадку задача (1), (2) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(t, x) = u^0(t, x) + \varepsilon \int_D K(t, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) d\tau d\xi \quad (12)$$

при умові, що ряд

$$(2\pi)^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k(t, \tau) \exp(ik(x - \xi)) \quad (13)$$

рівномірно збігається в області $D \times D$ до функції $K(t, x, \tau, \xi)$.

Із оцінок (7), (8) та леми випливає, що для майже кожного (відносно міри Лебега в \mathbb{R}) числа $\lambda_j T / \pi$, $j = 1, \dots, n$ ряд (13) рівномірно збігається в області $D \times D$.

Зпишемо рівняння (12) у вигляді

$$u(t, x) = A_{u^0}[u(t, x)], \quad (14)$$

де A_{u^0} – нелінійний інтегральний оператор, визначений у кулі $\bar{S}(u^0, r)$ формулою

$$A_{u^0}[u(t, x)] = v(t, x) + \varepsilon \int_D K(t, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) d\tau d\xi. \quad (15)$$

Позначимо:

V – сукупність функцій $v \in C^{2n}(D)$, для яких

$$\|v - u^0\|_{C^{2n}(D)} \leq \chi = r - |\varepsilon|\psi(1+r+\rho_1), \text{ де}$$

$$\psi(y) = \bar{r}\Gamma \left(\sum_{s=0}^{2n-3} (D_s + \bar{A}n^2 B_s) + \sum_{z=1}^3 y^z (D_{2n-3} + \bar{A}n^2 B_{2n-3}) + \frac{\lambda_0}{T} \right),$$

$$\bar{r} = \max_{0 \leq s \leq 4} \max_{D_1} \left| \frac{\partial^s f(t, x, u)}{\partial x^{s_1} \partial u^{s_2}} \right|, s = 0, 1, \dots, 2n-3,$$

а константи D_s, B_s ($s = \overline{0, 2n-3}$), ρ_1 визначаються формулами (11).

Покажемо, що для довільної функції $v(t, x)$ із V оператор A_v переводить кулю $\bar{S}(u^0, r)$ в себе, якщо $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, де $\varepsilon_1 = r / \psi(1+r+\rho_1)$.

На підставі формули

$$f_k(t, \{u_m(t)\}) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f \left(t, x, \sum_{|m| \geq 0} u_m(t) \exp(imx) \right) \exp(-ikx) dx$$

одержуємо

$$\max_{0 \leq t \leq T} |f_k(t, \{u_m(t)\})| \leq |k|^{-\alpha} \max_D |\partial^\alpha f(t, x, u(t, x)) / \partial x^\alpha|, \alpha = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Користуючись правилом диференціювання складної функції,

знаходимо

$$\begin{aligned} \max_D |\partial^\alpha f(t, x, u(t, x)) / \partial x^\alpha| &\leq \bar{r} (1 + \|u\|_{C^{2n}(D)})^\alpha \leq \\ &\leq \bar{r} \left(1 + \|u - u^0\|_{C^{2n}(D)} + \|u^0\|_{C^{2n}(D)} \right)^\alpha = \bar{r} (1+r+\rho_1)^\alpha, \alpha = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (17)$$

Із формули (15), враховуючи оцінки (7), (8) та (16)-(17), одержуємо

$$\begin{aligned} \|A_v[u(t, x)] - u^0(t, x)\|_{C^{2n}(D)} &\leq \|v - u^0\|_{C^{2n}(D)} + \\ &+ |\varepsilon| (2\pi)^{-1} \left\| \int_D \sum_{|k| \geq 0} G_k(t, \tau) \exp(ik(x-\xi)) f(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) d\tau d\xi \right\|_{C^{2n}(D)} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \chi + |\varepsilon| (2\pi)^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{|s| \leq 2n} \max_D \left| \frac{\partial^s}{\partial t^{s_1} \partial x^{s_2}} \int_0^T G_k(t, \tau) \int_0^{2\pi} f(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) \exp(ik(x-\xi)) d\tau d\xi \right| \leq$$

$$\leq \chi + |\varepsilon| \sum_{|k| > 0} \left(\sum_{|s| \leq 2n-3} \max_D |f(t, x, u)| |k|^{s_2} \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^{s_1}}{\partial t^{s_1}} \int_0^T G_k(t, \tau) d\tau \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{|s| \leq 2n-3} |k|^{2n-s_1-3} \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^{s_1}}{\partial t^{s_1}} \int_0^T G_k(t, \tau) d\tau \right| \times \right.$$

$$\left. \max \left| \frac{\partial^{|s| - 2n + 3} f(t, x, u(t, x))}{\partial x^{|s| - 2n + 3}} \right| + |\varepsilon| \sum_{s=0}^{2n} \max_D |f(t, x, u)| \left| \frac{\partial^{s_1}}{\partial t^{s_1}} \int_0^T G_0(t, \tau) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \chi + |\varepsilon| \Gamma \left(T \sum_{|s|=0}^{2n-3} \sum_{|k| > 0} \left(C_1 |k|^{-2n+|s|+1} + \bar{A}n^2 \sum_{j=1}^n C_j |k|^{-2n+|s|+1} |1 - \exp(2\gamma_j T)|^{-1} \right) + \right.$$

$$\left. + T \sum_{|s|=2n-2}^{2n} (1+r+\rho_1)^{|s|-2n+3} \times \right.$$

$$\left. = \sum_{|s|=0} \left(C_1 |k|^{-2} + \bar{A}n^2 \sum_{j=1}^n C_j |k|^{-2} |1 - \exp(2\gamma_j T)|^{-1} \right) + \lambda_0 \right) \leq \chi +$$

$$+ |\varepsilon| \Gamma \left(\sum_{s=0}^{2n-3} (D_s + \bar{A}n^2 B_s) + \sum_{z=1}^3 (1+r+\rho_1)^z (D_{2n-3} + \bar{A}n^2 B_{2n-3}) + \frac{\lambda_0}{T} \right) =$$

$$= \chi + |\varepsilon| \psi(1+r+\rho_1) = r.$$

Покажемо тепер, що для довільної функції $v(t, x) \in V$ оператор

A_v є оператором стиску, якщо $|\varepsilon| < \varepsilon_2$, де $\varepsilon_2 = 1 / \psi(1+2r+\rho_1)$. Нехай

$u_1(t, x), u_2(t, x) \in \bar{S}(u^0, r)$. Позначимо:

$$F(t, x) = f(t, x, u_1(t, x)) - f(t, x, u_2(t, x)),$$

$$\mathcal{U}(t, x) = \theta u_1(t, x) + (1-\theta) u_2(t, x), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

(18)

Із формули (15), враховуючи (7), (8), (16)-(19), формулу Лагранжа та лему, одержуємо, що для майже кожного (відносно міри Лебега в \mathbb{R}) числа $\lambda_j T / \pi, j=1, \dots, n$ справедлива оцінка

$$\begin{aligned} & \|A_v[u_1(t, x)] - A_v[u_2(t, x)]\|_{C^{2n}(D)} \leq \\ & \leq \varepsilon (2\pi)^{-1} \left\| \int_D \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k(t, \tau) F(\tau, \xi) \exp(ik(x - \xi)) d\tau d\xi \right\|_{C^{2n}(D)} \leq \\ & \leq |\varepsilon| \|f\| \|u_2(t, x) - u_1(t, x)\|_{C^{2n}(D)} \left(\sum_{|k|=0}^{2n-3} \sum_{|k|>0} T \left(C_1 |k|^{4-2n+1} + \bar{A} n^2 \sum_{j=1}^n C_j |k|^{4-2n+1} |1 - \exp(2\gamma_j T)|^{-1} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{|k|=2n-2}^{2n} \sum_{|k|>0} T (1+r+|u(t, x)|_{C^{2r}(D)})^{|k|-2n+3} \left(C_1 |k|^{-2} + \bar{A} n^2 \sum_{j=1}^n C_j |k|^{-2} |1 - \exp(2\gamma_j T)|^{-1} \right) + \lambda_0 \right) \leq \\ & \leq |\varepsilon| \|f\| \|u_2(t, x) - u_1(t, x)\|_{C^{2n}(D)} T \left(\sum_{s=0}^{2n-3} (D_s + \bar{A} n^2 B_s) + \sum_{s=1}^3 (1+2r+\rho_1)^s (D_{2n-3} + \bar{A} n^2 B_{2n-3}) + \frac{\lambda_0}{T} \right) \leq \\ & \leq |\varepsilon| \psi(1+2r+\rho_1) \|u_2 - u_1\|_{C^{2r}(D)}. \end{aligned}$$

Якщо $|\varepsilon| \psi(1+2r+\rho_1) < 1$, то A_v є оператором стиску для майже кожного числа $\beta_j = \lambda_j T / \pi, j=1, n$. Крім того, оператор A_v є неперервним за v . Згідно з теоремами 1 і 3 із [16, розділ 16], рівняння (14), а разом з ним і задача (1), (2), має єдиний розв'язок, що неперервно залежить від $\Phi(t, x)$.

Таким чином, ми довели наступну теорему:

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1 і нехай функція $f(t, x, u)$ неперервна за t і має обмежені похідні за змінними x, u до 4-го порядку включно в області D_1 . Тоді для майже кожного (відносно міри Лебега в \mathbb{R}) числа $\beta_j = \lambda_j T / \pi, j=1, 2, \dots, n$ і для всіх $\varepsilon, |\varepsilon| < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) в кулі $\bar{S} \subset C^{2n}(D)$, який неперервно залежить від функції $\Phi(t, x)$.

Результати роботи узагальнюються на випадок p просторових змінних ($p \geq 2$), коли область Ω є p -вимірним тором.

1. Арнольд В. И. Малые знаменатели. 1. Об отображении окружности на себя. //Изв. АН СССР. Сер. мат.- 1961.- Т. 25.- №1.- С. 21-86.

2. Березанский Р. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.-К.: Наук. думка, 1965.- С. 204-310.

3. Бурский В. П. Единственность решения задачи Дирихле в шаре для волнового уравнения //Дифференц. уравнения.- 1988.- Т. 24.- №6.- С. 1038-1039.

4. Вайперман Л. И., Горбачук М. Л. О граничных задачах для дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа в гильбертовом пространстве //Докл. АН СССР.-1975.- Т. 221.- №4.- С. 763-766.

5. Вахания Н. Н. Об одной краевой задаче с данными на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны //Докл. АН СССР.- 1975.- Т. 116.- №6.- С. 906-909.

6. Горбачук В. Н. О разрешимости задачи Дирихле для дифференциально-операторного уравнения второго порядка //Прямые и обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов.-К., 1985.- С. 8-22.

7. Денчев Р. О задаче Дирихле для волнового уравнения //Докл. АН СССР.- 1959.- Т. 127.- №3.- С. 501-504.

ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД У ПЕРІОДИЧНІЙ ЗАДАЧІ З КЕРУВАННЯМ

Для відшукування періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із керуванням застосовано проекційно-ітеративний метод. Доведено теореми існування та єдиності розв'язку.

A projectional-iterative method has been applied to find periodical solutions of differential equations systems with control. Theorems of existence and uniqueness of the solution have been proved.

Розглянемо T -періодичну по t систему диференціальних рівнянь

$$x' = f(t, x, \lambda) - A\lambda, \quad (1)$$

для якої ставиться задача відшукування значень параметра λ , при яких існують T -періодичні розв'язки (1), що задовольняють умови

$$x(0) = x(T) = x_0, \quad (2)$$

де $x, f, \lambda, x_0 \in E^m$, A - стала невідроджена матриця.

Для відшукування розв'язку задачі (1), (2), тобто пари $\{x(t), \lambda\}$, в даній роботі застосовано проекційно-ітеративний метод, який використовує ідеї методу Гальоркіна [1] та чисельно-аналітичного методу [2].

Коротко розглянемо загальну ідею методу. Нехай $\{\varphi_i(t)\}$ - повна система ортогональних на проміжку $[0; T]$ функцій і $g(t) \in C_{[0; T]}$.
Означимо

8. Пташник Б. Й. Про одну крайову задачу для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А.- 1976.- №6.- С. 522-526.

9. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.- К.: Наук. думка, 1984.- С. 88-129.

10. Пташник Б. И., Штабалюк Г. И. Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным. // Дифференц. уравнения.- 1986.- Т. 22.- №4.- С. 669-678.

11. Артемьев Н. А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат.- 1937.- №1.- С. 15-50.

12. Гой Т. П., Пташник Б. Й. Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн.- 1997.- Т. 47.- №2.- С. 187-195.

13. Митропольский Ю. А., Урманчева Л. Б. О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений // Укр. мат. журн.- 1990.- Т. 42.- №2.- С. 1657-1663.

14. Митропольський Ю. О., Хома Н. Г. Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн.- 1995.- Т. 47.- №10.- С. 1370-1375.

15. Канторович Л. В., Акилов Т. П. Функциональный анализ.- М.: Наука, 1977.- С. 346-420.

$$P_k g(t) = \sum_{i=1}^k C_i \varphi_i(t), \quad Q_k g(t) = (I - P_k)g(t),$$

де $C_i = \int_0^T g(t) \varphi_i(t) dt$, I -тотожний оператор. Використовуючи один із стаціонарних проєкційно-ітеративних методів, запропонованих М.С.Курпелем [3], побудуємо наближення до розв'язку задачі (1), (2) з допомогою співвідношень

$$x_{n+1}(t, \lambda) = x_0 + L(P_k f(t, x_{n+1}, \lambda) + Q_k f(t, x_n, \lambda)), \quad (3)$$

де $x_0(t, \lambda) = x_0$, $L(g(t)) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^T g(s) ds - \frac{t}{T} \int_0^T g(s) ds$.

Нехай $x_n(t, \lambda)$ визначено. Тоді, означивши

$P_k f(t, x_{n+1}, \lambda) = \sum_{i=1}^k C_{n+1,i} \varphi_i(t)$, $L(\varphi_i(t)) = \psi_i(t)$, $L(Q_k f(t, x_n, \lambda)) = g_n(t, \lambda)$, отримуємо

$$x_{n+1}(t, \lambda) = x_0 + g_n(t, \lambda) + \sum_{i=1}^k C_{n+1,i} \varphi_i(t).$$

Таким чином, знаходження $x_{n+1}(t, \lambda)$ зводиться до відшукування k м невідомих коефіцієнтів $C_{n+1,i}$, які визначаються із системи рівнянь

$$C_{n+1,i} = \int_0^T f(t, x_0 + \sum_{j=1}^k C_{n+1,j} \varphi_j(t) + g_n(t, \lambda), \lambda) \varphi_i(t) dt,$$

$i=1; 2; \dots; k$.

У випадку збіжності послідовності $\{x_n(t, \lambda)\}$ її границя $x_*(t, \lambda)$ буде задовольняти умови (2) й рівняння

$$x_*(t, \lambda) = x_0 + L(f(t, x_*(t, \lambda), \lambda)).$$

Систему (1) $x_*(t, \lambda)$ задовольнятиме при тих і тільки при тих значеннях λ_* , для яких виконана умова

$$\Lambda \lambda_* = T^{-1} \int_0^T f(t, x_*(t, \lambda_*), \lambda_*) dt.$$

Не зупиняючись на встановленні умов, при яких такі значення λ існують, розглянемо алгоритми, які дають змогу знаходити $x_*(t), \lambda_*$.

Нехай функція $f(t, x, y)$:

а) визначена і неперервна в області $D = (-\infty, \infty) \times I \times J$, $I = \{x: \|x - x_0\| \leq r\}$, $J = \{y: \|y\| \leq \rho\}$;

б) періодична по t з періодом T .

Розглянемо ітераційний процес

$$x_{n+1}(t) = x_0 + L(P_k f(t, x_{n+1}, \lambda_{n+1}) + Q_k f(t, x_n, \lambda_n)), \quad x_0(t) = x_0, \quad (4)$$

$$\Lambda \lambda_n = T^{-1} \int_0^T f(t, x_n(t), \lambda_n) dt, \quad n=0; 1; \dots, \quad (5)$$

де проєкційний оператор $P_k (P_k^2 = P_k)$ для довільної функції $g(t) \in C_{[0, T]}$ визначається рівністю

$$P_k g(t) = \sum_{s=1}^k a_s \cos \frac{2\pi s t}{T} + b_s \sin \frac{2\pi s t}{T},$$

$$a_s = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos \frac{2\pi s t}{T} dt, \quad b_s = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin \frac{2\pi s t}{T} dt.$$

Пояснимо процес відшукування послідовних наближень. Λ_0 визначається шляхом розв'язання системи (5) при $n=0$. Для відшукування $x_1(t)$ введемо позначення

$$a_{s1} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t, x_1(t), \lambda_1) \cos \frac{2\pi s t}{T} dt, \quad b_{s1} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t, x_1(t), \lambda_1) \sin \frac{2\pi s t}{T} dt, \quad (6)$$

$$g_0(t) = L(Q_k f(t, x_0, \lambda_0)).$$

Тоді із (4) отримуємо

$$x_1(t) = x_0 + g_0(t) + \sum_{s=1}^k \frac{T}{2\pi s} \left[a_{s1} \sin \frac{2\pi s t}{T} + b_{s1} \left(1 - \cos \frac{2\pi s t}{T}\right) \right]. \quad (7)$$

Підставляючи (7) в рівності (5), (6), отримаємо систему $(2k+1)m$ рівнянь з $(2k+1)m$ невідомими $a_{s1}, b_{s1}, \lambda_1$, розв'язуючи яку, знаходимо $x_1(t), \lambda_1$. Аналогічно знаходимо $x_2(t), \lambda_2$ і т.д.

Дослідимо умови, при яких система (4), (5) має розв'язок. При цьому відносно функції $f(t,x,y)$ будемо додатково вважати, що виконуються нерівності

- в) $\|f(t,x,y)\| \leq M$;
- г) $\|f(t,x,y) - f(t,\bar{x},\bar{y})\| \leq K \|x - \bar{x}\| + N \|y - \bar{y}\|, x, \bar{x}, y, \bar{y} \in D$.

Відмітимо, що виконуються оцінки

$$\|L(P_k g(t))\|_c \leq \frac{T}{2} \|g(t)\|_c, \quad (8)$$

$$\|L(Q_k g(t))\|_c \leq \frac{T}{\pi} \sigma(k) \|g(t)\|_c, \quad (9)$$

$$\text{де } \sigma^2(k) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{4}, & k = 0, \\ \sum_{i=1}^{\infty} (k+i)^{-2}, & k = 1; 2; \dots \end{cases}$$

Доведення нерівностей (8), (9) здійснюється аналогічно роботі [4].

Умови, при яких існують наближення $x_n(t), \lambda_n$, встановлює

Теорема 1. Нехай виконуються нерівності

$$\max \left\{ \frac{T}{\pi} \sigma(k) + \frac{T}{2}; \|A^{-1}\| \right\} \cdot M \leq \min \{r; \rho\}, \quad (10)$$

$$\max \left\{ \frac{T}{2}; \|A^{-1}\| \right\} \cdot (K + N) < 1. \quad (11)$$

Тоді система (4), (5) при будь-яких $x_n(t) \in I, \lambda_n \in J$ має єдиний розв'язок $x_{n+1}(t) \in I, \lambda_{n+1} \in J$.

Доведення. Позначимо через S множину векторів $Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda \end{pmatrix}$,

які задовольняють умову $\|Z(t) - Z_0\|_S \leq \min \{r; \rho\}, Z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta \end{pmatrix}$. Норму

на S означимо співвідношенням $\|Z(t)\|_S = \max \{ \|x(t)\|_c, \|\lambda\| \}$.

Розглянемо визначений на S оператор

$$U(y, z) = \begin{pmatrix} x_0 + L(P_k f(t, y) + Q_k f(t, z)) \\ T^{-1} A^{-1} \int_0^T f(t, z(t)) dt \end{pmatrix}, \quad f(t, z) = f(t, x, \lambda).$$

Нехай $y(t), z(t) \in S$. Тоді, в силу (10), отримуємо, що $U(y, z) \in S$, тобто $US \subset S$. Для $y(t), z(t), \bar{z}(t) \in S$ маємо

$$\|U(y, z) - U(y, \bar{z})\|_S \leq \left\| \begin{pmatrix} \frac{T}{2} K & \frac{T}{2} N \\ \|A^{-1}\| K & \|A^{-1}\| N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x(t) - \bar{x}(t)\|_c \\ \|\lambda - \bar{\lambda}\| \end{pmatrix} \right\|_S \leq \max \left\{ \frac{T}{2}, \|A^{-1}\| \right\} \cdot (K + N) \|z - \bar{z}\|_S,$$

отже, оператор $U(y, z)$ є стискуючий по змінній z . Використовуючи принцип Банаха, робимо висновок, що рівняння $z = U(y, z)$ при будь-якому $y(t) \in S$ має єдиний розв'язок $z(t) \in S$. Теорема доведена.

Умови збіжності послідовностей $\{x_n(t)\}, \{\lambda_n\}$ до розв'язку задачі (4.1), (4.2) встановлює

Теорема 2. Нехай функція $f(t,y,z)$ задовольняє умови а) – г), виконуються нерівності (10), (11), а також нерівності

$$q = \frac{T \sigma(k) K}{\pi(1 - \pi K - \|A^{-1}\| N)} < 1; \pi K + \|A^{-1}\| N < 1.$$

Тоді послідовні наближення $x_n(t)$, λ_n визначені співвідношеннями (4), (5), сходяться при $n \rightarrow \infty$ рівномірно по $t \in (-\infty; \infty)$ до єдиного розв'язку $\{x_*(t), \lambda_*\}$ задачі (1), (2), причому

$$\|x_n(t) - x_*(t)\|_c \leq \frac{q^n T}{1-q} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma(k)}{\pi} \right) M, \quad (12)$$

$$\|\lambda_n - \lambda_*\| \leq \frac{q^n T (\pi + 2\sigma(k)) \|A^{-1}\| KM}{2\pi(1-q)(1-\|A^{-1}\|N)}, \quad n=0; 1; \dots$$

Доведення. Очевидно, що при всіх $n=0; 1; \dots$ наближення $x_n(t)$, λ_n належить області визначення f , тобто $x_n(t) \in I$, $\lambda_n \in J$. Враховуючи умови ν , γ) і нерівності (8), (9), із (4), (5) отримуємо співвідношення

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq \frac{T}{\pi} \sigma(k) (K \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|_c + N \|\lambda_n - \lambda_{n-1}\|) + \frac{T}{2} (K \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_c + N \|\lambda_{n+1} - \lambda_n\|),$$

$$\|\lambda_{n+1} - \lambda_n\| \leq \|A^{-1}\| + (K \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_c + N \|\lambda_{n+1} - \lambda_n\|),$$

з допомогою яких знаходимо

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_c \leq q \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|_c, \quad (14)$$

$$\|\lambda_{n+1} - \lambda_n\| \leq \|A^{-1}\| K (1 - \|A^{-1}\|N)^{-1} \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_c. \quad (15)$$

Нерівність

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_c \leq q^n \|x_1(t) - x_0\|_c,$$

яка впливає з попередніх, а також умова $q < 1$ дають можливість зробити висновок про існування границь

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x_*(t)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_*$. Очевидно, що $x_*(t) \in I$, є періодичною

по t з періодом T і задовольняє умови (2), $\lambda_* \in J$. Переходячи до границі у співвідношеннях (4), (5), переконуємося, що $\{x_*(t), \lambda_*\}$ —

розв'язок задачі (1), (2). Доведення єдиності можна виконати методом від протилежного. Оцінки (12), (13) впливають із нерівностей (14), (15). Теорема доведена.

Відмітимо, що оскільки $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(k) = 0$, то вибір k може суттєво впливати на швидкість збіжності послідовностей $\{x_n(t)\}$, $\{\lambda_n\}$, що створює певні переваги пропонованого методу над іншими, використання яких є неефективним через повільну збіжність.

1. М.А.Красносельский и др. Приближенное решение операторных уравнений. —М.: Наука, 1969.—455 с.
2. А.М.Самойленко, Н.И.Ронто. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. —К.: Вища шк., 1976. —180 с.
3. Н.С.Курпель. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. —К.: Наук. думка, 1968.—244 с.
4. В.И.Гречко. Об одном проекционно-итеративном методе определения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений //Укр. мат. журн. — 1974. — 26. — №4. — С. 534–539.

М.М.Зарічний

ІНВАРІАНТНІ СУПЕРРОЗШИРЕННЯ КОМПАКТНИХ ТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП

Кожна компактна топологічна група має природну дію на своєму суперрозширенні (просторі максимальних зчеплених систем замкнених множин з волменівською топологією). Досліджується множина нерухомих точок цієї дії (інваріантне суперрозширення).

Every compact topological group admits the natural action on its superextension (the space of maximal linked system of closed sets with the Wallman topology). We investigate a set of fixed points of this action (the invariant superextension).

1. Вступ

Конструкція суперрозширення введена в математику де Гроотом [1]. З часом почали інтенсивно вивчатися її функторіальні властивості (суперрозширення визначають коваріантний ендифунктор у категорії COMP компактних гаусдорфових просторів та неперервних відображень), зв'язки з топологією неметризованих компактів та нескінченновимірною топологією [2].

У цій праці розглядається підпростір суперрозширення компактної топологічної групи, утворений інваріантними максимальними зчепленими системами. Ця конструкція є

функторіальною в підкатегорії категорії компактних топологічних груп та їх неперервних епіморфізмів.

Використовуємо в основному стандартні позначення. Зокрема, $w(X)$ означає вагу топологічного простору X . Якщо X – компактний гаусдорфовий простір, то через $\text{exp}(X)$ позначаємо простір всіх непорожніх компактних підмножин в X з топологією Вісторіса. Базу цієї топології утворюють множини вигляду

$$\langle U_1, \dots, U_k \rangle = \{A \in \text{exp } X \mid A \subset \bigcup_{i=1}^k U_i, A \cap U_i \neq \emptyset \text{ для кожного } i\}$$

У випадку, коли X метризований деякою метрикою ρ , топологія Вісторіса на $\text{exp}(X)$ індукується метрикою Гаусдорфа ρ_H :

$$\rho_H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subset O_\epsilon(B), B \subset O_\epsilon(A)\}$$

Непорожню замкнену підмножину $M \subset \text{exp } X$ назвемо зчепленою системою якщо $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ для кожних $M_1, M_2 \in M$. Зчеплена система називається максимальною, якщо вона не є власною підмножиною деякої зчепленої системи. Легко побачити, що кожна максимальна зчеплена система в $\text{exp } X$ є замкненою множиною в $\text{exp } X$, тобто є елементом простору $\text{exp } \text{exp } X$. Підмножина в $\text{exp } \text{exp } X$, елементами якої є максимальні зчеплені системи, називається суперрозширенням простору X і позначається $\lambda(X)$. Топологія на $\lambda(X)$ – це топологія, індукована з $\text{exp } \text{exp } X$, проте оригінальний опис цієї топології був дещо інший. Для кожної підмножини $A \in \text{exp } X$ прийmemo $A^+ = \{M \in \lambda(X) \mid A \in M\}$. Множини вигляду A^+ , де $A \in \text{exp } X$, утворюють передбазу для замкнених підмножин топології в $\lambda(X)$.

Якщо (X, ρ) – компактний метричний простір, то на $\lambda(X)$ розглядаємо метрику Фербеєка ρ_V (див.[3]):

$\rho_{\sqrt{}}(M,N)=\inf\{\varepsilon>0 \mid \text{для кожного } M \in M \text{ існує } N \in N \text{ таке, що } N \subset O_{\varepsilon}(M)\}.$

Через Q позначаємо гільбертовий куб, $Q = \prod_{i=0}^{\infty} [-1,1]$, (тут $[-1,1]$ - копія відрізка $[-1,1]$) Далі будемо використовувати характеристичну теорему для Q , доведену Г. Торуньчиком [4]. Нагадаємо, що метризований простір називають *абсолютним ретрактом*, якщо він є ретрактом кожного оточуючого метричного простору, що містить його як замкнену підмножину. У випадку неметризованих компактних гаусдорфових просторів треба використовувати інше означення: простір є *абсолютним ретрактом*, якщо він є ретрактом кожного оточуючого тихоновського простору. Клас абсолютних ретрактів позначають **AR**. Метризований простір X має *властивість диз'юнктної апроксимації*, якщо тотожне відображення 1_X апроксимується відображеннями з диз'юнктними образами (в топології рівномірної збіжності, якщо йдеться про компактний випадок).

Теорема 1. *Компактний метричний простір X гомеоморфний Q тоді і лише тоді, коли $X \in \mathbf{AR}$ і X має властивість диз'юнктної апроксимації.*

2. Інваріантні суперрозширення.

Для компактної топологічної групи G приймемо

$$i\lambda(G) = \{M \in \lambda(G) \mid aM = M \text{ для всіх } a \in G\}.$$

Крім того, нехай $iL(G) = \{A \in \text{exp}(\text{exp}(G)) \mid A - \text{зчеплена система і } gA \in A \text{ для кожних } A \in A, g \in G\}.$

За аналогією з [5] запровадимо відображення

$$\xi: i\lambda(G) \times iL(G) \rightarrow i\lambda(G)$$

формулою:

$\xi(M,A) = \{A \in \text{exp}(G) \mid A \supset B \in A\} \cup \{M \in M \mid M \cap A \neq \emptyset \text{ для кожного } M \in M\}.$

Відображення ξ є звуженням на $i\lambda(G) \times iL(G)$ відображення, означеного в [5]. Для перевірки коректності означення ξ необхідно лише переконатися, що воно набуває значення в $i\lambda(G)$, а це очевидно.

Твердження 2.1. *Нехай $f: G \rightarrow H$ - неперервний сюр'єктивний гомоморфізм компактних топологічних груп. Тоді $\lambda(f)(i\lambda(G)) \subset i\lambda(H)$.*

Доведення. Нехай $M \in i\lambda(G)$. Тоді $\lambda(f)(M) = \{fM \mid M \in M\}$. Нехай $a \in H$ і $b \in G$ - такі, що $a = f(b)$. Тоді

$$\lambda(f)(M) = \lambda(f)(bM) = \{f(bM) \mid M \in M\} = \{af(M) \mid M \in M\} = a\lambda(f)(M),$$

тобто $\lambda(f)(M) \in i\lambda(H)$.

Зауваження 2.2. Умова сюр'єктивності відображення f є суттєвою.

Позначимо через C категорію, об'єктами якої є компактні гаусдорфові топологічні групи, а морфізмами - неперервні сюр'єктивні гомоморфізми. Якщо $f: G \rightarrow H$ - морфізм категорії C , то через $i\lambda(f)$ позначимо відображення $\lambda(f) \mid i\lambda(G) : i\lambda(G) \rightarrow i\lambda(H)$.

Твердження 2.3. *$i\lambda$ - функтор із категорії C в категорію COMP .*

Твердження 2.4. *Функтор $i\lambda$ неперервний.*

Доведення. Нехай $S = \{G_{\alpha}, f_{\alpha\beta}, A\}$ - обернена система в категорії C і $G = \lim S$. Позначимо через φ_{α} граничний морфізм з $\lim \lambda S$ в $\lambda(G_{\alpha})$, а через p_{α} - граничну проекцію $G \rightarrow G_{\alpha}$. Нехай $h = \lim \lambda(p_{\alpha}) : \lambda(G) \rightarrow \lim \lambda S$ - природний гомеоморфізм (існує за неперервністю функтора λ , див. [2]).

Нехай $M \in i\lambda(G)$. Тоді $\lambda(p_\alpha)(M) \in i\lambda(G_\alpha)$ для кожного $\alpha \in A$.
Отже, $h(M) \in \lim i\lambda S$ і $h(i\lambda(G)) \subset \lim i\lambda(S)$.

З іншого боку, нехай $M \in \lim i\lambda(S) \subset \lim \lambda(S)$, $M_\alpha = \varphi_\alpha(M)$.
Приймемо

$$N = \{p_\alpha^{-1}(M) \mid M \in M_\alpha, \alpha \in A\}.$$

Тоді, очевидно, $N \subset h^{-1}(M)$.

Покажемо, що $gN = N$ для кожного $g \in G$. Нехай $N \in N$ і $N = p^{-1}\beta(N_\beta)$, де $N_\beta \in M_\beta$. Тоді $gN = gp^{-1}(N_\beta) = p^{-1}(p_\beta(g)N_\beta) \in N$.

Покажемо, що якщо для деякої замкненої множини $A \subset G$ маємо $A \cap N \neq \emptyset$ при $n \in N$, то $A \in h(M)$. Справді, припустимо протилежне. Тоді існує $M \in h^{-1}(M)$ таке, що $A \cap M = \emptyset$ і, отже, існує $\alpha_0 \in A$ таке, що $p_{\alpha_0}(A) \cap p_{\alpha_0}(M) = \emptyset$. Отже, $p_{\alpha_0}(A) \notin M_{\alpha_0}$ і $A \cap p_{\alpha_0}^{-1}(p_{\alpha_0}(M)) = \emptyset$, що дає суперечність.

Нарешті покажемо, що $h^{-1}(M) \in i\lambda(G)$. Нехай $M \in h^{-1}(M)$ і $g \in G$. Тоді для кожного $N \in N$ маємо $M \cap g^{-1}(N) \neq \emptyset$ і, отже, $gM \cap N \neq \emptyset$. Звідси $gM \in h^{-1}(M)$.

Таким чином, $h(i\lambda(G)) = \lim i\lambda(S)$, що й треба було довести.

Твердження 2.5. Нехай $f: G \rightarrow H$ – морфізм категорії C і G – зв'язна група. Тоді $i\lambda(f): i\lambda(G) \rightarrow i\lambda(H)$ – відображення на.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли G, H метризовні. Нехай μ – міра Гаара на G і

$$S_\mu = \{A \mid A \text{ замкнена в } G, \mu(A) \geq 1/2\}.$$

Зауважимо, що $S_\mu \in i\lambda(G)$ (див. також [6]). Означимо відображення $\varphi: i\lambda(G) \rightarrow i\lambda\{G\}$ формулою:

$\varphi(A) = \{A \in \text{exp}G \mid A \supset B \text{ для деякого } B \in S_\mu\} \cup \{A \in S_\mu \mid A \cap B \neq \emptyset\}$
для кожного $A \in A$.

Якщо тепер $M \in i\lambda(H)$, то, прийнявши $N = \varphi(\{f^{-1}(M) \mid M \in M\})$, одержуємо $i\lambda\{f\}(N) = M$.

Загальний випадок одержується трансфінітною індукцією за $\tau = w(G)$.

Наслідок 2.6. Для кожної зв'язної компактної топологічної групи G маємо $i\lambda(G) \neq \emptyset$.

Нагадаємо, що неперервне відображення $f: X \rightarrow Y$ називається *м'яким* [7], якщо для кожного паракомпакта Z , кожної його замкненої підмножини A і відображень $\varphi: Z \rightarrow Y$, $\psi: A \rightarrow X$ таких, що $\varphi|_A = f\psi$, існує неперервне відображення $\Phi: Z \rightarrow X$ таке, що $f\Phi = \varphi$.

Нам знадобиться один допоміжний результат із нескінченно-вимірної топології.

Лема 2.7. Нехай $f: X \rightarrow Q$ – м'яке відображення, де X – метризований компакт. Тоді простір X гомеоморфний Q .

Доведення. Скористаємося характеристичною теоремою І.Г.Торуньчана. З м'якості відображення f легко випливає, що $X \in AR$. Розглянемо послідовності відображень $(f_i: Q \rightarrow Q)_{i=0}^\infty, (g_i: Q \rightarrow Q)_{i=0}^\infty$ такі, що $f_i \rightarrow 1_Q, g_i \rightarrow 1_Q$ і для кожного i маємо $f_i(Q) \cap g_i(Q) = \emptyset$.

Означимо відображення $\varphi: X \times (\omega+1) \rightarrow Q$ формулою:

$$\varphi(x, i) = \begin{cases} f_k f(x), & i = 2k, k \in \omega, \\ g_k f(x), & i = 2k + 1, k \in \omega, \\ f(x), & i = \omega \end{cases}$$

Очевидно, що відображення φ неперервне. За м'якістю відображення f , відображення $\psi: X \times \{\omega\} \rightarrow Q$, $\psi(x, \omega) = x$, продовжується до відображення $\Phi: X \times (\omega+1) \rightarrow Q$ такого, що $f\Phi = \varphi$. Приймаючи $\tilde{f}_i(x) = \Phi(x, 2i)$, $\tilde{g}_i(x) = \Phi(x, 2i+1)$, отримуємо послідовності відображень \tilde{f}_i, \tilde{g}_i , що прямують до відображення 1_x (в топології рівномірної збіжності). Маємо також

$$\tilde{f}_i(X) \cap \tilde{g}_i(X) \subset f^{-1}(g_i(Q)) = \emptyset.$$

За теоремою Торуньчика, простір X гомеоморфний Q .

3. Основні результати

Теорема 2. Нехай $f: G \rightarrow H$ – неперервний гомоморфізм зв'язних топологічних груп. Тоді відображення $i\lambda(f)$ м'яке.

Теорема 3. Нехай G – зв'язна компактна топологічна група. Тоді $i\lambda(G) \in AR$.

Доведення. Ми одночасно дамо доведення теорем 2 і 3. Нехай τ – деяке кардинальне число. Позначимо через A_τ таке твердження: якщо $f: G \rightarrow H$ – неперервний гомоморфізм зв'язних топологічних груп і $w(G) \leq \tau$, то $i\lambda(f)$ – м'яке відображення, а через B_τ – твердження: якщо G – зв'язна топологічна група і $w(G) \leq \tau$, то $i\lambda(G) \in AR$.

Лема 3.1. Якщо G – зв'язна топологічна група, для якої $i\lambda(G) \in AR$, і $f: G \rightarrow H$ – неперервний скор'єктивний гомоморфізм, то відображення $i\lambda(f)$ м'яке.

Доведення. Нехай A, Z – паракомпакти і задано комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & i\lambda(G) \\ i \downarrow & & \downarrow i\lambda(f), \\ Z & \xrightarrow{\varphi} & i\lambda(H) \end{array}$$

де i – замкнене вкладення. Оскільки $i\lambda(G) \in AR$, існує відображення $\tilde{\psi}: Z \rightarrow i\lambda(G)$ таке, що $\psi = \tilde{\psi}i$. Для $A \in \text{exp exp}(H)$ прийmemo $f(A) = \{f^{-1}(A) \mid A \in A\} \in \text{exp exp}(G)$. Неперервність відображення F випливає з відкритості відображення f . Очевидно, що якщо $A \in iL(H)$, то $F(A) \in iL(G)$. Для кожного $x \in X$ прийmemo $\Phi(x) = \xi(\tilde{\varphi}(x), F(\varphi(x)))$. Очевидно, що $\varphi = i\lambda(f)\Phi$, $\psi = \Phi i$, отже, відображення $i\lambda(f)$ м'яке.

Далі для доведення використовуємо трансфінітну індукцію. Припустимо, що твердження A_τ, B_τ доведено при $\tau < \omega$. Нехай G – зв'язна компактна топологічна група і $w(G) = \tau$. Зобразимо G у вигляді границі неперервної оберненої системи $\{G_\alpha, p_{\alpha\beta}; \tau\}$, де $w(G_\alpha) < \tau$. За твердженнями A_τ, B_τ при $\tau < \tau$ маємо, що $i\lambda(G_\alpha) \in AR$ для $\alpha < \tau$ і відображення $i\lambda(p_{\alpha\beta})$ м'які при $\beta \leq \alpha < \tau$. За теоремою Щепіна про адекватність абсолютних ретрактів і м'яких відображень [7] отримуємо, що $i\lambda(G) \in AR$. За лемою 3.1, виконано A_τ .

Теореми і є основами для встановлення в деяких випадках топологічного типу просторів вигляду $i\lambda(G)$.

Теорема 4. Нехай G – зв'язна неодноточкова компактна метризована топологічна група. Тоді простір $i\lambda(G)$ гомеоморфний гільбертовому кубові Q .

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли G – зв'язна група L_i , $\dim G \geq 2$. Нехай μ – міра Гаара на G . Розглянемо деяку

лівоінваріантну ріманову метрику на G і нехай ρ – індукована нею метрика на G . Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Існує множина $A_\varepsilon \in \text{exp}(G)$ така, що:

- (1) $\mu(A_\varepsilon) = 0$;
- (2) $gA_\varepsilon \cap A_\varepsilon \neq \emptyset$ для кожного $g \in G$;
- (3) $\rho_H(A_\varepsilon, G) < \varepsilon$.

Множину A_ε нескладно побудувати як деяке скінченне об'єднання меж куль радіуса $\varepsilon/2$. Звичайно, тоді існує множина $B_\varepsilon \in \text{exp}(G)$ така, що:

- (1) $\mu(B_\varepsilon) > 1/2$;
- (2) $\rho_H(B_\varepsilon, G) < \varepsilon$
- (3) $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$.

Очевидно, що тоді $gB_\varepsilon \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$ для кожного $g \in G$.

Означимо відображення $f_1, f_2: i\lambda(G) \rightarrow i\lambda(G)$ формулами:

$$f_1(M) = \xi(M, \{gA_\varepsilon \mid g \in G\}), f_2 = \xi(M, \{gB_\varepsilon \mid g \in G\}).$$

Позначимо через d sup-метрику, породжену метрикою ρ_V , у просторі неперервних відображень зі значеннями в $i\lambda(G)$. Тоді $d(f_i, 1_{i\lambda(G)}) < \varepsilon$, $i=1,2$ (див. [5]). Крім того, з властивостей множин $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ випливає, що $f_1(i\lambda(G)) \cap f_2(i\lambda(G)) = \emptyset$. Отже, за довільністю ε , простір $i\lambda(G)$ має властивість диз'юнктної апроксимації. За характеристичною теоремою Торуньчика, з урахуванням теореми 3, простір $i\lambda(G)$ гомеоморфний Q .

Нехай тепер G – зв'язна група Лі, $\dim G = 1$. Тоді $G = S^1 = \{e^{2\pi i t} \mid t \in [0,1]\}$. Позначимо через C стандартну канторову

множину на $[0,1]$. Доповнивши множину $\{e^{2\pi i t} \mid t \in C\}$ скінченним числом точок, одержимо множину $A_\varepsilon \in \text{exp}(G)$ з описаними вище властивостями.

Для перевірки цих властивостей скористаємося фактом, який пропонуємо читачеві довести самостійно: $C \cap (t+C) \neq \emptyset$ для кожного $t \in [0,1]$. Оскільки $\mu(A_\varepsilon) = 0$, як і вище, можемо вибрати $B_\varepsilon \in \text{exp}(G)$ з описаними властивостями.

Перейдемо до загального випадку. З теореми Понтрягіна випливає, що існує сюр'єктивний гомоморфізм групи G на невідноточкову групу Лі. Залишилось скористатися лемами 3.1 і 2.7.

4. Відкриті проблеми

Виникає природне припущення, що існує аналог теореми 4 для неметризовного випадку, тобто що простір $i\lambda(G)$ гомеоморфний тихоновському кубові Γ^τ , де $\tau = w(G)$. Для доведення досить скористатися характеристичною теоремою Щепіна для тихоновського кубу [8] і показати, що у цьому випадку простір $i\lambda(G)$ однорідний за характером.

Інше питання стосується топології відображень $i\lambda(f): i\lambda(G) \rightarrow i\lambda(H)$ для неперервного сюр'єктивного гомоморфізму $f: G \rightarrow H$ зв'язних топологічних груп. Коли відображення $i\lambda(f)$ гомеоморфне проектуванню $Q \times Q \rightarrow Q$? проектуванню $\Gamma^\tau \times \Gamma^\tau \rightarrow \Gamma^\tau$?

1. Groot J. de. Suprecompactness and superextensions // Proc. I Intern Symp. on Extension Theory of Topological Structures and its Appl.: VEB Deutsches Verlag Wiss., 1967. – P.89-90.

2. Иванов А. В. Суперрасширения метризуемых континуумов и обобщенного канторовского дисконтинуума // Докл. АН СССР. – 1980. Т.254. – № 2. – С.279-281.

3. Mill J. van. Superextensions and Wallman spaces. // Math. Centre Tracts. – Vol.85. – 1977.

4. Torunczyk H. On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds //Fund. math. – 1980. – Vol.106. – №1. – P.31-40.

5. Vel M. van de. Superextensions and Lefschetz fixed point structures // Fund. Math. – 1979. – Vol.104. – №1. – P.27-42.

6. Зарічний М. М. Абсолютные экстензоры и геометрия умножения монад в категории компактов // Мат. сборник. – 1991. – Т.182. – №9. – С.1261-1280.

7. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. – 1981. – Т.36. – Вып.3. – С.3-62.

8. Щепин Е. В. О тихоновских многообразиях // Докл. АН СССР. – 1979. – Т.246. – №3. – С.551-554.

Б.В. Атаманюк, О.М. Кузич.

ЗБЕРЕЖЕННЯ Q-МНОГОВИДІВ ПРИ КЛІТКОВО-ПОДІБНИХ ВІДОБРАЖЕННЯХ ТА МЕНГЕРОВСЬКИХ МНОГОВИДІВ ПРИ UV^K ВІДОБРАЖЕННЯХ

Стаття присвячена збереженню Q-многовидів та менгеровських многовидів при дії клітково-подібними та UV^K – відображеннями відповідно, а також збереженню належності до класу абсолютних околових ретрактів при CE – відображеннях.

Автори довели три теореми, які є розв'язками відповідних відкритих проблем з нескінченномірної топології про збереження симетричних властивостей при CE – та UV^K – відображеннях.

This paper is devoted to preserving Q-manifolds and Menger manifolds during the acting of cell-like and UV^K –maps accordingly, so does it retain its adherence to the class of absolute near retracts during the acting of CE – maps.

The authors have proved three theorems which solve respective open problems in infinite – dimensional topology about preserving geometric properties during the acting of CE – and UV^K –maps.

Постановка проблем належить Дж. Весту [1], Т. Чепмену [2]. Перший автор довів теорему 1 про збереження Q-многовидів при CE-відображеннях і теорему 3 про збереження менгеровських многовидів при UV^K – відображеннях, а другий – теорему 2 про збереження ANR

при клітково-подібних відображеннях. Необхідні означення можна знайти в [1] – [6].

Означення 1. Клітково-подібним відображенням називається таке відображення $f: X \rightarrow Y$, що: 1) воно сюр'єктивне, 2) для будь-якого $u \in Y$ повний прообраз $f^{-1}(u) \subset X$ - клітково-подібний, тобто він компактний, метричний і деформується в точку.

Відома наступна теорема:

Для власного відображення $f: X \rightarrow Y$ між локально-компактними метричними просторами, якщо X та Y ANR – простори, наступні умови еквівалентні:

1. f - клітково-подібне відображення;
2. f – наслідкова гомотопічна еквівалентність;
3. f – наслідкова шейпова еквівалентність;
4. f – тонка гомотопічна еквівалентність.

Означення 2. Відображення f називається наслідковою гомотопічною еквівалентністю, якщо обмеження $f: f^{-1}U \rightarrow U$ є власною гомотопічною еквівалентністю для довільної відкритої множини $U \subset Y$.

Означення 3. $f: X \rightarrow Y$ називається наслідковою шейповою еквівалентністю, якщо воно є шейповою еквівалентністю $f: f^{-1}A \rightarrow A$ для будь-якої замкнутої підмножини A в Y .

Означення 4. Відображення $f: X \rightarrow Y$ називається тонкою гомотопічною еквівалентністю, якщо воно є α -еквівалентністю для будь-якого відкритого покриття $\alpha \in \text{COV}(Y)$; воно буде α -еквівалентністю, якщо воно має α -гомотопний зворотний, тобто існує таке відображення $g: Y \rightarrow X$, така гомотопія F , яка з'єднує композицію $g \circ f$ та Id_X , і

такою гомотопія G , яка з'єднує композицію $f \circ g$ та Id_Y , причому гомотопія G обмежена покриттям α , а гомотопія F обмежена покриттям $F^{-1}(\alpha) = \{f^{-1}U: U \in \alpha\}$. Зауважимо, що G обмежене покриттям α , якщо будь-яка гомотопічна траєкторія точки $G(x, t)$ знаходиться в деякому елементі покриття α .

Відома топологічна характеристика Q-многовидів, що одержана Х. Торунчиком.

Локально-компактний ANR X буде Q-многовидом тоді і тільки тоді, коли будь-яка пара відображень може бути апроксимована парою відображень $g, h: Q \rightarrow X$ з диз'юнктними образами.

Переходимо до основних результатів даної статті.

Теорема 1. 1) Якщо X – Q-многовид, 2) X та Y – локально-компактні простори, 3) $f: X \rightarrow Y$ – власне і клітково-подібне відображення, 4) простори X та Y належать класу ANR(M), – то Y також Q-многовид.

Доведення. Використаємо теорему Чігогідзе про те, що для будь-якого локально-компактного простору Y наступні умови еквівалентні:

1) Y – Q-многовид, 2) Y – сильно MComp – універсальний, де MComp – клас усіх метризованих компактів; а сильна MComp – універсальність простору X означає, що в просторі $C(B, X)$ всюди щільною буде множина замкнутих вкладень, тобто для будь-якого $\alpha \in \text{COV}(X)$ і для будь-якого простору B , що належить класу MComp метризованих компактів, для будь-якої замкнутої множини $A \subset B$ і для будь-якого неперервного відображення $\psi: B \rightarrow X$ такого, що обмеження

$\psi|_A$ – замкнуте вкладення, існує продовження ξ відображення $\psi|_A$ таке, що виконуються дві наступні умови:

- 1) ξ - замкнуте вкладення, 2) $(\xi, \psi) < \alpha$.

Зафіксуємо довільне відкрите покриття $\omega \in \text{COV}(Y)$. З еквівалентності умов CE і тонкої гомотопічної еквівалентності для просторів, що належать класу ANR, випливає, що відображення $f: X \rightarrow Y$ – тонка гомотопічна еквівалентність, тобто δ -еквівалентність для будь-якого відкритого покриття $\delta \in \text{COV}(Y)$. Це означає, що відображення f має δ -гомотопне зворотне, тобто таке відображення $g: X \rightarrow Y$ і такі дві гомотопії $F: g \circ f \cong \text{Id}_X$ та $G: f \circ g \cong \text{Id}_Y$, що жодна з них не виводить за межі покриттів δ або $f^{-1}(\delta)$ відповідно, тобто будь-яка гомотопічна траєкторія $G\{x \cdot I\}$ належить повністю деякому елементу $U \in \delta$. Так само гомотопічна траєкторія $F\{y \cdot I\}$ повністю належить деякому елементу $V \in f^{-1}(\delta)$.

Виберемо довільне відкрите покриття $\delta \in \text{COV}(Y)$, зірчато вписане в ω . Нехай $\alpha = f^{-1}(\delta)$. Виберемо довільне неперервне відображення $\varphi: B \rightarrow Y$ таке, що обмеження $\varphi|_A$ – замкнуте вкладення. Означимо: $\psi = g \circ \varphi: B \rightarrow X$, де g – відображення з означення тонкої гомотопічної еквівалентності, яке власно-гомотопне зворотне до f , причому гомотопія не виводить за межі ні δ , ні α .

Оскільки обмеження $\varphi|_A$ є замкнутим вкладенням, то обмеження $\psi|_A = g \circ \varphi|_A = g|_{\varphi A}$ також можна вважати замкнутим вкладенням. В якості гомеоморфізму h беремо гомотопію G , тоді за стискующим критерієм Бінга відображення g можна вважати майже гомеоморфізмом.

Замкнутість зберігається, бо зберігається компактність при переході до прообразу при власних відображеннях.

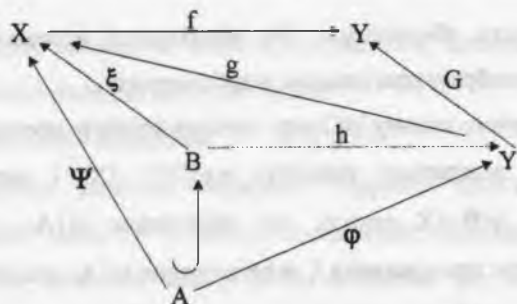
Застосовуємо сильну MComp – універсальність простору X . Для побудованого відкритого покриття $\alpha \in \text{COV}(X)$ і неперервного відображення $\psi: B \rightarrow X$ такого, що обмеження $\psi|_A$ – замкнуте вкладення, існує продовження ξ відображення $\psi|_A$, яке задовольняє наступні умови: 1) ξ - замкнуте вкладення, 2) $d(\xi, \psi) < \alpha$.

Означимо $h = G(f \circ \xi, \{1\})$, де гомотопія G з'єднає композицію $f \circ g$ та Id_Y , причому $G(y, 0) = f \circ g(y)$, $G(y, 1) = y$. Тоді обмеження $h|_A = G(f \circ \xi|_A, \{1\}) = G(f \circ \psi|_A, \{1\}) = G(f \circ g \circ \varphi|_A, \{1\}) = \varphi|_A$, бо гомотопія G з'єднає композицію $f \circ g$ і тотожне відображення Id_Y . Отже відображення h буде продовженням відображення $\varphi|_A$.

Перевіримо, що $(h, \varphi) < \omega$. Оскільки $(\xi, \varphi) < \alpha$ і $\delta = f(\alpha)$ за побудовою α , і покриття δ зірчато вписане в ω , а також з умови, що траєкторія G не виводить за межі δ , одержуємо $(\xi, g \circ \varphi) < \alpha$, тобто $(f \circ \xi, f \circ g \circ \varphi) < f(\alpha) = \delta$. Але $f \circ g \circ \varphi = G(f \circ g, \{0\})$. Оскільки δ зірчато вписане в покриття ω , то, застосовуючи гомотопію $G(\sim; \{1\})$, одержимо $(G(f \circ \xi, \{1\}), G(f \circ g \circ \varphi, \{1\})) < \omega$; де $G(f \circ \xi, \{1\}) = h$, а $G(f \circ g \circ \varphi, \{1\}) = \varphi$. Звідси випливає, що $(h, \varphi) < \omega$.

Зауважимо, що h буде замкнутим вкладенням. Отже, сильна MComp – універсальність доведена, а значить і теорема 1 також.

Наведемо відповідну комутативну діаграму до теореми 1:



Теорема 2. Якщо виконуються наступні умови: 1) простори X та Y локально-компактні; 2) f - клітково-подібне відображення; 3) X належить класу ANR(M); 4) відображення f – тонка гомотопічна еквівалентність, – то Y належить класу ANR(M).

Доведення. За теоремою Лефшеца-Дугунджі простір X належить класу ANR(M) тоді і тільки тоді, коли для будь-якого відкритого покриття $\alpha \in \text{COV}(X)$ існує таке відкрите покриття $\beta \in \text{COV}(X)$, яке є відкритим подрібненням покриття α (зірчато вписане), і таке, що кожна часткова β -реалізація довільного симпліціального підполітопу $A \subset P$ з топологією Уайтхеда в X продовжується до повної α -реалізації політопа P в X.

Зафіксуємо покриття $\omega \in \text{COV}(Y)$ і означимо $\alpha = f^{-1}(\omega)$. Нехай β зірчато вписане в α . За умовою теореми, відображення f – клітково-подібне відображення, відображення f має апроксимативне праве зворотне, враховуючи еквівалентність понять клітково-подібного відображення і тонкої гомотопічної еквівалентності для просторів класу ANR, існує відображення $g_\omega: Y \rightarrow X$ таке, що виконуються наступні умови: 1) $g_\omega \circ f \cong \text{Id}_X$, причому $d\{g_\omega \circ f, \text{Id}_X\} < \alpha = f^{-1}(\omega)$, 2) $\text{track } F$

не виводить за межі α , 3) $f \circ g_\omega \cong \text{Id}_Y$, причому 4) $\text{track } G_\omega$ не виходить за межі ω .

Позначимо $\gamma = g_\omega^{-1}(\beta)$. Вибір відбувається згідно з діаграмою $\gamma \leftarrow \beta * > \alpha \leftarrow \omega$.

Нехай $\psi: A \rightarrow Y$ буде частковою γ -реалізацією. Позначимо $\phi = g_\omega \circ \psi: A \rightarrow X$. Оскільки $g_\omega(\gamma) = \beta$, то ϕ буде частковою β -реалізацією. Але X належить класу ANR(M), тому за теоремою Лефшеца-Дугунджі існує продовження $\Phi: P \rightarrow X$, яке буде α -реалізацією.

Беремо $\Psi = G_\omega(f \circ \Phi)$. Тоді обмеження $\Psi|_A = G_\omega(f \circ \Phi)|_A = G_\omega(f \circ \phi) = G_\omega(f \circ g_\omega \circ \psi) = G_\omega(f \circ g_\omega) \circ \psi = \text{Id}_Y \circ \psi = \psi$, бо G_ω з'єднує два відображення $f \circ g_\omega$ та Id_Y . Отже відображення Ψ буде продовженням відображення ψ . Перевіримо, що Ψ буде ω -реалізацією. Оскільки $\Psi = G_\omega(f \circ \Phi)$, причому Φ уже є α -реалізація, а $f(\alpha) = \omega$ за вибором α , то $f \circ \Phi$ буде ω -реалізацією. Але G_ω не виводить за межі ω , тому $G_\omega(f \circ \Phi) = \Psi$ залишається ω -реалізацією. За теоремою Лефшеца-Дугунджі (теорема 4.1 в [4]) простір Y належить класу ANR(M). Теорема 2 доведена.

Зауважимо, що проблеми про CE-відображення сформульовані Андерсоном, Кертісом, Козловським та Шорі в додатку до книги Чепмена "Лекції про Q-многовиди", в розділі "CE-образи ANR-просторів та Q-многовидів" під номерами CE1-CE9. Їх можна об'єднати у вигляді двох загальних проблем:

(M) За яких умов CE-образ Q-многовиду залишається Q-многовидом?

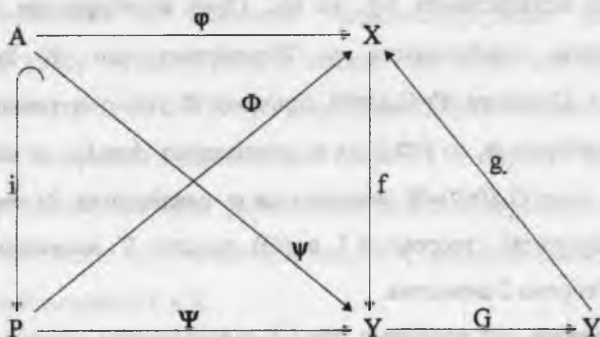
(A) За яких умов CE-образи ANR-просторів залишаються ANR-просторами?

У зв'язку з наявністю на найбільш загальні постановки контрприкладів типу "дикої дуги" Вонга, розбиття типу "собача кістка" Ітона та прикладу Тейлора про SE-відображення на Гільбертів куб, яке не є шейповою еквівалентністю, виникає необхідність накладати додаткові умови у формулюванні теореми.

Такою необхідною умовою часто є тонка гомотопічна еквівалентність.

Першим автором розв'язані відкриті проблеми із списку Дж. Веста: №736, №846, №847, №848, №872, №891, одержані часткові результати про спектральну рухомість.

Наведемо відповідну комутативну діаграму до теореми 2:



Нагадаємо конструкцію менгерівського компакту μ^k . Нехай куб $I^{2k+1} \subset E^{2k+1}$. Розбиваємо його на 3^{2k+1} конгруентних куби гіперплощинами, перпендикулярними до ребер у точках поділу ребер на 3 рівні частини.

Залишимо тільки ті куби, які перетинаються з K -вимірним остовом куба I^{2k+1} , решту "вирізаємо". Залишається "перфорований" куб, що дорівнює об'єднанню 2^{2k+1} кубів. Це буде куб I рангу, позначимо його через $I_{k,1}^{2k+1}$. Далі кожний з утворених кубів знову

перфоруємо на 3^{2k+1} куби, розрізаючи ребра на три рівні частини, залишаючи "остовні" куби і вирізаючи "не остовні" куби. Об'єднання утворених кубів назвемо кубом II рангу і позначимо $I_{k,2}^{2k+1}$. Продовжуючи процес, одержимо спадну вкладену послідовність компактів $I_{k,1}^{2k+1} \supset I_{k,2}^{2k+1} \supset \dots$.

Компакт

$$\mu^K = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_{k,i}^{2k+1}$$

називаємо K -мірним універсальним компактом Менгера. Наприклад, $\mu^0 = 2^{\omega}$ - канторів дисконтинуум:

$$\mu^0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_{0,i}^1$$

Інший приклад: μ^1 -універсальна крива Менгера:

$$\mu^1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_{i,i}^3 \subset I^3$$

Андерсон довів, що μ^1 топологічно однорідний, тобто для будь-яких $x, y \in \mu^1$ існує гомеоморфізм $h: \mu^1 \rightarrow \mu^1$, що $h(x)=y$.

Означення 1. Простір X називають локально $(K-1)$ -зв'язним (LC^{K-1}), якщо для будь-якого $x \in X$ і для будь-якого околу $U(x)$ існує окіл $V(x)$ із наступною властивістю: будь-яке відображення $\alpha: \partial B^{i+1} \rightarrow V$ ($i=0,1,2,\dots,k-1$) продовжується до відображення $\tau: B^{i+1} \rightarrow U$.

Означення 2. Компактний простір X називається UV^{K-1} компактом, якщо для будь-якого вкладення $h: X \subset M$ простору X в ANR -простір M існує окіл U образу $h(x)$ в просторі M такий, що індукований вкладенням гомоморфізм $\pi_i(U) \rightarrow \pi_i(M)$ фундаментальних груп є тривіальним.

Означення 3. Власне сюр'єктивне відображення $f: X \rightarrow Y$ називають UV^{K-1} - відображенням, якщо для будь-якої точки $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y) \in UV^{K-1}$ - компакт.

У 1984 р. американський тополог М. Бествіна заклав основи теорії μ^k -многовидів [5]. У докторській дисертації М.Бествіни [5] були доведені наступні теореми:

1. Характеризаційна теорема 1.

Для локально-компактного метричного X наступні умови еквівалентні:

(1) X допускає відкрите покриття, будь-який елемент якого гомеоморфний відкритій підмножині, яка належить менгерівському компакт μ^k ;

(2) X належить LC^{K-1} , $\dim X = K$, X задовольняє $DD^* K$.

2. Теорема про продовження гомеоморфізмів.

Будь-який гомеоморфізм $h: Z_1 \rightarrow Z_2$ між Z -множинами компакта μ^k може бути продовжений до автогомеоморфізму

$H: \mu^k \rightarrow \mu^k$, причому для будь-якого $\alpha \in COV(\mu^k)$ існує своє $\delta \in COV(\mu^k)$ і своє продовження H_α , що з умови $(h, id_{Z_1}) < \delta$ випливає $(H_\alpha, Id_{\mu^k}) < \alpha$.

3. Характеризаційна теорема 2.

Для будь-якого K -мірного локально-компактного LC^{K-1} простору X наступні умови еквівалентні:

(1) $X \in \mu^k$ многовидом;

(2) Будь-яке відображення дискретної суми $I^K \oplus I^K \rightarrow X$ як завгодно близько апроксимується вкладенням;

(3) Будь-яке досконале відображення кожного не більше ніж K -мірного, локально - компактного простору в X як завгодно близько апроксимується вкладенням;

(4) Будь-яке досконале відображення кожного не більше ніж K -мірного, локально - компактного простору в X як завгодно близько апроксимується Z -вкладенням;

(5) LC -універсальність: довільне досконале відображення $f: B \rightarrow X$ будь-якого не більше ніж K -мірного, локально компактного B в X , обмеження якого на замкнутій підмножині $A \subset B \in Z$ -вкладенням, як завгодно близько апроксимується Z -вкладеннями, що дорівнюють f на A .

Теорема 4.

Будь-яка точка довільного μ^k -многовиду $M \in Z$ -множиною в M .

Теорема 5.

Компакт μ^k топологічно однорідний.

Теорема 6.

Якщо відображення $f: M \rightarrow K$ між компактними μ^k -многовидами індукуює ізоморфізм гомотопічних груп для будь-якого $m \leq K-1$, то звідси випливає, що M гомеоморфне K .

Теорема 7 (аналог CE-відображень для Q).

Досконалі UV^{K-1} сюр'єкції і тільки вони між μ^k -многовидами апроксимуються гомеоморфізмом M (тобто є майже гомеоморфізмами).

По аналогії з CE відображеннями для Q многовидів виникає питання про збереження μ^k -многовидів при UV^k відображеннях.

Першим автором доведена наступна теорема.

Теорема 3.

Якщо $f: M \rightarrow K$ UV^k – відображення μ^k -многовиду M на простір K , що виконуються наступні умови:

- (1) f -досконала UV^k – сюр'єкція;
- (2) M, N – k -вимірні локально компактні LC^{k-1} простори, – то K також буде μ^k -многовидом.

Доведення: Треба довести, що для будь-якого відкритого покриття $\alpha \in COV(K)$, для будь-якого досконого відображення $\psi: B \rightarrow K$ з будь-якого не більше як k -мірного локально-компактного B в простір K , обмеження якого на замкнуту підмножину $A \subset B$ є Z – вкладенням, існує Z -вкладення $F: B \rightarrow K$, що:

- (1) $(F, \psi) < \alpha$;
- (2) F є продовженням відображення $\psi|_A$.

Виберемо відкрите покриття γ , зірчато вписане в покриття α .

Далі виберемо $\beta = f^{-1}(\gamma)$ і δ , зірчато вписане в покриття β . Тут

$f^{-1}(\gamma)$ означає: $\{f^{-1}(U): U \in \gamma\}$.

За умовою $f \in UV^k$, тому, за теоремою А. Чігогідзе [6], для відображення $f: M \rightarrow K$, де $\dim K \leq k+1$, наступні умови еквівалентні:

- (1) f - UV^k -відображення;
- (2) f -спадкова n -шейпова еквівалентність.

Отже можна вибрати як завгодно близько праве гомотопне зворотне відображення $g: K \rightarrow M$ таке, що композиція $f \circ g$ n -гомотопна, тотожному відображенню Id_K , причому гомотопія G не виводить за межі задалегідь заданого відкритого покриття $\gamma \in COV(K)$, а гомотопія

F , яка з'єднує композицію $g \circ f$ і тотожне відображення Id_M , не виводить за межі покриття δ .

Позначимо $\varphi = g \circ \psi: B \rightarrow M$. Тоді для вибраного $\delta \in COV(M)$ і вибраного $\varphi: B \rightarrow M$ з умови, що M є μ^k -многовидом, за характеристичною теоремою М. Бествіні, випливає, що існує Z -вкладення $\xi: B \rightarrow M$ таке, що

- (1) ξ буде продовженням $\varphi|_A$;
- (2) $(\xi, \varphi) < \delta$.

Позначимо $F = G \circ f \circ \xi$, де G – гомотопія, яка з'єднує композицію $g \circ f$ та Id_K і не виводить за межі покриття γ , зірчато вписаного в покриття α .

Тоді $F|_A = G \circ f \circ \xi|_A = G \circ f \circ \varphi|_A = G \circ f \circ g \circ \psi|_A = \psi|_A$, бо композиція $f \circ g$ n -гомотопна тотожному Id_K , причому гомотопія G не виводить за межі покриття γ .

Отже, виконуються наступні умови:

- (1) F буде продовженням відображення $\psi|_A$;
- (2) F буде Z -вкладенням, бо ξ є Z -вкладенням, а відображення f – майже гомеоморфізм (теорема М.Бествіні в [5]);
- (3) $(F, \psi) = (G \circ f \circ \xi, \psi) < \alpha$, бо $(f \circ \xi, f \circ g \circ \psi) < \gamma$. Останнє вірно, бо

$(\xi, g \circ \psi) < \delta$ за вибором відображення g і за вибором покриття δ , яке зірчато вписане в покриття $f^{-1}(\gamma)$.

Отже, виконуються всі умови характеристичної теореми М.Бествіні [5], тому K буде μ^k -многовидом. Теорема 3 доведена.

1. J. West. Open problems of Infinite-dimensional Topology, Amsterdam, 1990. – 72 p.
2. Чепмен Т. лекции о Q-многообразиях. – М.: Мир, 1981.–156 с.
3. Федорчук В.В. Чигогидзе А.Ч. Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. – М.: Наука, 1992. – 250 с.
4. Hu See Tzen. Theory of retracts. – Detroit, 1965. – 220 p.
5. M. Bestwina. Characterizing k-dimensional universal Menger compacta: Dissertation. Zhe Universitet of Tennessee. – Knoxville. – 1984. –110 p.
6. Чигогидзе А. Ч. Теория n-шейпов //Успехи мат. наук. – 1989. – Т.44. – Вып. 5 (269). – С.118-140.

Д.І.Боднар, Х.Й.Кучмінська

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

Використовуючи теореми Зейделя, Стільтєса-Віталі, лему про неагромадження похибки при обчисленні неперервних дробів, встановлено критерій збіжності двовимірних неперервних дробів з додатними елементами та аналог теореми Ван Флека.

Using Seidel and Stiejes-Vitali theorems as well as the lemma on the error noncumulation under continued fraction computation the convergence criterion for two-dimensional continued fractions with positive elements and the Van Vleck-like theorem are established.

1. Неперервним дробом називається впорядкована пара $\langle \langle \{a_n\}, \{b_n\} \rangle, \{f_n\} \rangle$, де $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ ($i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}_0$), причому всі $a_i \neq 0$ і $f_n \in \mathbb{C}$, $f_n = S_n(0)$, $n \in \mathbb{Z}$, $S_0(w) = s_0(w)$; $S_n(w) = S_{n-1}(s_n(w))$, $n \in \mathbb{N}$, $s_0(w) = b_0 + w$; $s_n(w) = a_n(b_n + w)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, для запису якого використовується позначення

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}} = b_0 + \mathbf{D} \frac{a_i}{b_i}. \quad (1)$$

Неперервний дріб збігається, якщо існує скінчена границя послідовності його n -х наближень $f_n = b_0 + \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}$. Якщо кожне n -е наближення неперервного дробу (1) зобразити у вигляді $f_n = A_n/B_n$, то для A_n і B_n справедливі рекурентні формули

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \\ A_0 &= b_0, A_{-1} = 1, B_0 = 1, B_{-1} = 0, (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2)$$

Ці формули та властивості дробово-лінійних відображень суттєво використовуються при дослідженні збіжності неперервних дробів [6]. Методи дослідження неперервних дробів детально проаналізовані в монографіях [6, 8, 10], де також викладені основні ознаки їх збіжності.

2. Для наближення аналітичних функцій використовують різні типи функціональних неперервних дробів: S -дроби, T -дроби, J -дроби та ін. Одним із найзагальніших методів побудови розвинення функцій у такі дроби є принцип відповідності [6].

Предметом нашого дослідження є двовимірні неперервні дроби. Нехай P – кільце формальних подвійних степеневих рядів

$$\sum_{i,j \geq 0} c_{ij} x^i y^j, \quad c_{ij} \in \mathbb{C}, \quad x, y \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

D – сукупність двовимірних неперервних дробів (скорочено ДНД)

$$\prod_{i=0}^{\infty} \frac{a_{ij} xy}{\Phi_i(x, y)}, \quad \Phi_i(x, y) = \prod_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{jj} x}{1} + \prod_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{jj} y}{1}, \quad a_{ij} \in \mathbb{C}, \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

(4)

Дріб (4) називається відповідним до ряду (3), якщо розвинення кожного n -го наближення ДНД (4)

$$f_n = \prod_{i=0}^{[n-1]} \frac{a_{ij} xy}{\Phi_i^{(n-2i-1)}(x, y)}, \quad \Phi_i^{(m)}(x, y) = 1 + \prod_{j=i+1}^m \frac{a_{jj} x}{1} + \prod_{j=i+1}^m \frac{a_{jj} y}{1} \quad (5)$$

у формальний ряд $\sum_{i,j \geq 0} c_{ij}^{(n)} x^i y^j$ задовольняє співвідношення $c_{ij}^{(n)} = c_{ij}$,

$i+j \leq n$.

У роботах [3, 9] досліджено умови існування відповідного дробу і знайдено формули для обчислення коефіцієнтів a_{ij} .

Вибір наближень для ДНД (4) можна здійснювати по-різному, в залежності від кількості елементів у складових дробу. Як і для подвійних неперервних дробів [1] природно розглядати n -і наближення у вигляді

$$f_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{a_{ij} xy}{\Phi_i^{(n-i-1)}(x, y)}, \quad \Phi_i^{(m)}(x, y) = 1 + \prod_{j=i+1}^m \frac{a_{jj} x}{1} + \prod_{j=i+1}^m \frac{a_{jj} y}{1}. \quad (6)$$

Зауважимо, що дроби (4) з наближеннями (6) також задовольняють принцип відповідності.

Двовимірний неперервний дріб (4) збігається, якщо існує скінчена границя послідовності його наближень.

ДНД (4) збігається абсолютно, якщо збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1} - f_k|,$$

складений з його k -х наближень.

Методи дослідження збіжності неперервних дробів у принципі не переносяться на двовимірний випадок, оскільки аналогів рекурентних формул (2) для ДНД немає і двовимірні дробово-лінійні відображення не утворюють групи відносно композицій відображень. Для дослідження ДНД розроблено спеціальні методи, зокрема метод

фундаментальних нерівностей, метод мажорант [1, 4, 5]. Встановлено двовимірні аналоги ознак збіжності неперервних дробів: теореми Ворпіцького, Слешинського-Прінгсгейма, Коха, параболічні теореми [5].

3. Дослідимо збіжність числового ДНД

$$\overset{\infty}{D} \frac{1}{\Phi_i}, \Phi_i = b_{ij} + \overset{\infty}{D} \frac{1}{b_{ji}} + \overset{\infty}{D} \frac{1}{b_{ij}}, \quad (7)$$

вибираючи наближення вигляду (6).

Теорема 1. Двовимірний неперервний дріб (7) з додатними елементами збігається тоді і тільки тоді, коли розбігаються ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \quad (j = 0, 1, \dots), \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \quad (i = 0, 1, \dots), \quad \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i. \quad (8)$$

Доведення. Достатність. Неперервні дроби, з яких складаються Φ_i , згідно з критерієм Зейделя, збіжні. Розглянемо неперервний дріб

$$\overset{\infty}{D} \frac{1}{\Phi_i}, \quad (9)$$

де Φ_i – сума значень збіжних неперервних дробів. Із розбіжності ряду $\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i$ випливає збіжність ДНД (9). Позначимо через g_n – n -е наближення дробу (9) і оцінимо зверху різницю $|f_n - g_n|$, де f_n – n -е наближення ДНД (7) вигляду (6). Нехай $\varepsilon > 0$ довільне і як завгодно мале число, тоді існує такий номер k , що $|g_{k-1} - g_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отже, для довільних $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ виконується нерівність

$$\left| \frac{1}{\Phi_0 + \dots + \frac{1}{\Phi_{k-2} + \frac{1}{\Phi_{k-1} + \alpha}}} - \frac{1}{\Phi_0 + \dots + \frac{1}{\Phi_{k-2} + \frac{1}{\Phi_{k-1} + \beta}}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (10)$$

Нехай $f_{k,n}$ – скінчений неперервний дріб вигляду

$$f_{k,n} = \frac{1}{\Phi_0 + \dots + \frac{1}{\Phi_{k-1} + \frac{1}{\Phi_k^{(n-k-1)} + \dots + \frac{1}{\Phi_{n-1}^{(0)}}}}}$$

Виберемо номер $n, n > k$ настільки великим, щоб виконувалися нерівності $\left(0 \leq r \leq \frac{(n-1)}{2} \right)$

$$\left| \frac{\Phi_{2r}^{(n-2r-1)} - \Phi_{2r}}{\Phi_{2r}} \right| < \frac{\varepsilon}{2f_{k,n}}, \quad \left| \frac{\Phi_{2r+1}^{(n-2r-2)} - \Phi_{2r+1}}{\Phi_{2r+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{2f_{k,n}}. \quad (11)$$

Оцінимо зверху

$$|f_n - g_n| \leq |f_n - f_{k,n}| + |f_{k,n} - g_n|.$$

Згідно з (10) маємо $|f_{k,n} - g_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Використовуючи лему 2 [2] і нерівності (11), де $f_{k,n}$ – точний, а f_n – наближений дробу, отримуємо $f_n - |f_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Достатність доведена.

Необхідність. Нехай ДНД (7) збігається, тоді покажемо, що всі його залишки Φ_i та $Q_i = \Phi_i + \prod_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{\Phi_k}$ також збігаються.

Оскільки дріб Q_0 є дробом оберненим до ДНД (7), то цей дріб збігається. Позначимо через f_{0n} , ψ_{0n} і g_{1n} n -і наближення до дробів Q_0 , Φ_0 , $1/Q_1$ відповідно. Враховуючи властивість вилки для дробів із додатними компонентами, маємо, що для довільних $k, j \in \mathbb{N}$

$$\psi_{0,2k} < \psi_{0,2j+1}, \quad g_{1,2k} < g_{1,2j+1}.$$

Отже, існують скінченні границі

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{0,2k} = \Psi_0; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_{1,2k} = G_0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{0,2j+1} = \Psi_1; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_{1,2j+1} = G_1$$

і виконуються нерівності

$$\Psi_0 \leq \Psi_1, \quad G_0 \leq G_1.$$

Оскільки, в силу збіжності дробу Q_0 , $\Psi_0 + G_0 = \Psi_1 + G_1$, то $\Psi_0 = \Psi_1$, $G_0 = G_1$, а тому збігаються дробу Φ_i і $1/Q_i$. Продовжуючи цей ряд, доходимо висновку, що всі залишки Φ_i і Q_i збігаються, отже, враховуючи структуру Φ_i , є збіжними неперервні дробу $\prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{b_{i+1,i}}$,

$\prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{b_{i+1,i}}$, а тому розбіжні ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ij} \quad (j = 0, 1, \dots), \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \quad (i = 0, 1, \dots).$$

Покажемо, що неперервний дріб (9) збіжний. Оскільки елементи дробу (9) додатні, то існують скінченні границі його парних і непарних наближень, а тому нерівність (10) виконується при достатньо великих k . Враховуючи оцінку $|f_n - g_n|$, отриману при доведенні достатності, робимо висновок, що ДНД (7) і (9) збігаються чи розбігаються одночасно. Тому за критерієм Зейделя ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i$ розбіжний.

Теорема 2. Нехай частинні знаменники ДНД (7) належать області

$$G_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\},$$

тоді

- 1) кожне n -е наближення f_n ДНД (7) належить цій області;
- 2) існують скінченні границі парних f_{2n} і непарних f_{2n+1} наближень при $n \rightarrow \infty$;
- 3) ДНД (7) збігається, якщо розбігаються ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ij}| \quad (j = 0, 1, \dots), \quad \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}| \quad (i = 0, 1, \dots),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i, \quad F_i = |b_{ii}| + \prod_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{|b_{ji}|} + \prod_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{|b_{ij}|}.$$

Доведення. 1) Якщо $b_{ij} \in G_\varepsilon$, то $1/b_{ij} \in G_\varepsilon$,

$$b_{ii} + \frac{1}{b_{i+1,i}} + \frac{1}{b_{i+1,i}} \in G_\varepsilon, \quad b_{ij} + \frac{1}{b_{i+1,j}} \in G_\varepsilon, \quad b_{ij} + \frac{1}{b_{i,j+1}} \in G_\varepsilon$$

в силу випуклості області G_ε . Отже, для довільного n : $f_n \in G_\varepsilon$.

2) Розглянемо функціональний дріб

$$\prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\Phi_i(z)}, \quad \Phi_i(z) = b_i(z) + \prod_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{b_{ji}(z)} + \prod_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{b_{ij}(z)}, \quad (12)$$

де $b_{pq}(z) = |b_{pq}| \exp(i\gamma_{pq}z), \gamma_{pq} = \arg b_{pq}$.

Нехай

$$|\operatorname{Re} z| < 1 + \varepsilon(\pi - 2\varepsilon)^{-1}, \quad (13)$$

тоді $|\arg b_{pq}(z)| = |\gamma_{pq} \operatorname{Re} z| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi - 2\varepsilon}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2} - \delta, \delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Отже, $b_{pq}(z) \in G_{\delta}, \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, якщо z належить області (13). З 1) маємо, що n -і наближення ДНД (12) $f_n(z)$ ($n=1,2,\dots$) є голоморфними функціями в області (13).

Розглянемо область

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1 + \varepsilon(\pi - 2\varepsilon)^{-1}, |\operatorname{Im} z| < 1\}.$$

Для $z \in D$ і послідовності голоморфних функцій $\{f_n(z)\}$ виконуються умови теореми Стільтьєса-Віталі [1].

Нехай $z \in \Delta$ і $\Delta = \{w : \operatorname{Re} w = 0, |\operatorname{Im} w| < 1\}$. Тоді ДНД (12) набере вигляду

$$\prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\Phi_i}, \quad \Phi_i = \hat{b}_i + \prod_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{b_{ji}} + \prod_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{b_{ij}},$$

де $\hat{b}_{pq} = |b_{pq}| \exp(-\gamma_{pq}y) > 0, y = \operatorname{Im} z$.

Із властивості вилки [7] випливає, що парні й непарні наближення ДНД (14) мають границі, тому, за теоремою Стільтьєса-Віталі, існують скінченні границі $f_{2n}(1) = f_{2n}, f_{2n+1}(1) = f_{2n+1}$, тобто пункт 2) справедливий.

Доведемо пункт 3). Враховуючи, що

$$\hat{b}_{pq} = |b_{pq}| \exp(-\gamma_{pq}y) \geq \exp(-\pi/2),$$

і умов теореми випливає, що ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ij}| (j=0,1,\dots), \quad \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}| (i=0,1,\dots)$$

розбіжні. Оцінимо знизу $\hat{\Phi}_i$:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_i &= |b_{ii}| \exp(-\gamma_{ii}y) + \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|b_{i+j,i}| \exp(-\gamma_{i+j,i}y)} + \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|b_{i,i+j}| \exp(-\gamma_{i,i+j}y)} \geq \\ &\geq |b_{ii}| \exp(-\pi/2) + \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|b_{i+j,i}| \exp((-1)^{j+1} \pi/2)} + \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|b_{i,i+j}| \exp((-1)^{j+1} \pi/2)} \geq \\ &\geq F_i \exp(\pi/2). \end{aligned}$$

Отже, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \hat{\Phi}_i$ – розбіжний.

Збіжність ДНД (14) випливає з теореми 1, а збіжність ДНД (12) – з теореми Стільтьєса-Віталі.

Наслідок. ДНД (7), елементи якого належать області G_{ε} , збігається, якщо розбігаються ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ij}| (j=0,1,\dots), \quad \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}| (i=0,1,\dots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} |b_{ii}|.$$

1. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби.– К.: Наук. думка, 1986.– 176 с.

2. Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й. Параболічна область збіжності для двовимірних неперервних дробів //Мат. студії. Вип. 4.– 1995.– С. 29-36.

3. Кучмінська Х. Й. Відповідні і приєднані гіллясті ланцюгові дробі для подвійного степеневого ряду //Доп. АН УРСР. Сер. А.– 1978.– №7.– С. 617-618.

4. Скоробогатко В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике.– М.: Наука, 1983.– 312 с.

5. Bodnar D., Kuchmins'ka Kh., Sus' O. A survey of analytic theory of branched continued fraction //Communications in the analytic theory of continued fractions.– Vol. 2.– 1993.– P. 4-23.

6. Jones W. B., Thron W. J. Continued Fractions: analytic theory and applications.– MA: Addison-Wesley, Reading, 1980.– 428 p.

7. Kuchmins'ka Kh. On the «fork» property for two-dimensional continued fractions. Vol. 6.– 1997.– P. 32-35.

8. Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions with Applications.– Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1992.– 606 p.

9. Murphy J. A., O'Donohoe M. A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions //Journ. Comp. and Appl. Math.– 1978.– Vol. 4.– №3.– P. 181-190.

10. Wall H. S. Analytic theory of Continued Fractions.– N. Y.: Van Nostrand, 1948.– 433 p.

ФІЗИКА

О.М.Возняк, Т.І.Луцишин, І.В.Дацьо

ЕНЕРГЕТИЧНИЙ СПЕКТР ГРАТКОВИХ ЕЛЕКТРОНІВ ІЗ ДІАГОНАЛЬНИМ БЕЗЛАДОМ У МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Метод функцій Гріна застосовано до вивчення енергетичного спектра граткових електронів із випадковим значенням енергії на вузлі в постійному магнітному полі. Одержано аналітичний вираз для спектра системи двох ланцюжків атомів. Для п'яти ланцюжків подано графічне представлення чисельних розрахунків.

Green's function method has been used to investigate the energy spectrum of lattice electrons with a random energy at the sites in the constant magnetic field. The analytic expression for the spectrum of the 2-chains system has been obtained. The numerical analysis for the 5-chains systems is presented graphically.

Існує стійкий інтерес до вивчення впливу магнітного поля на властивості сильнозв'язаних електронів неупорядкованих систем. Найважливішими проблемами цього напрямку є вивчення механізмів низькотемпературної електропровідності в неупорядкованих системах із локалізованими станами [1,2], вплив ефектів квантової інтерференції в так званих мезоскопічних матеріалах [3],

цілочисельний та дробовий ефекти Холла [4]. Хоча такі завдання привертали увагу багатьох дослідників, вони ще далекі від свого остаточного вирішення.

Основоположний вплив на поведінку електронних систем має енергетичний спектр і вивчення впливу таких факторів, як магнітне поле, кристалічний потенціал, різні порушення ідеальності ґратки на нього є дуже актуальним.

Ще Л.Д. Ландау довів, що магнітне поле впливає на вільні електрони таким чином, що замість суцільної зони виникає декілька вироджених рівнів Ландау [5]. Згодом було показано [6], що коли на вільні електрони поряд з магнітним полем діє і періодичний потенціал, то рівні Ландау розщеплюються на ряд підзон енергії.

У нашій роботі досліджується енергетичний спектр невпорядкованої системи електронів, які знаходяться у вузлах кристалічної ґратки і, крім того, перебувають у постійному магнітному полі. Невпорядкованість у системі є невпорядкованістю так званого діагонального типу, при якій кристалічна ґратка є ідеальною, а енергія електрона на вузлі є випадковою величиною, хоч інтеграли перекриття між сусідніми вузлами залишаються однаковими.

При розгляді руху електрона в постійному магнітному полі слід замінити оператор імпульсу $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ на оператор узагальненого імпульсу $\hat{p} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\bar{A}$, де \bar{A} – векторний потенціал магнітного поля.

Тоді гамільтоніан невзаємодіючих електронів записується у вигляді

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\bar{A} \right)^2 + V(\bar{r}). \quad (1)$$

Одноелектронна ж задача на ґратці в магнітному полі описується гамільтоніаном

$$\hat{H}_i = \frac{1}{2m} \left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A} \right)^2 + V(\bar{r} - \bar{R}_i), \quad (2)$$

де $V(\bar{r} - \bar{R}_i)$ – потенціальна енергія електрона, що є сумою енергій взаємодії з кожним із атомів.

Власні функції гамільтоніана системи електронів зручно вибирати в такому вигляді [5]

$$\psi_i(\bar{r} - \bar{R}_i) = e^{i\frac{e}{\hbar c}\bar{A}(\bar{R}_i)(\bar{r} - \bar{R}_i)} \varphi_i(\bar{r} - \bar{R}_i), \quad (3)$$

де $\varphi_i(\bar{r} - \bar{R}_i)$ – хвильові функції атомних орбіталей.

Якщо в межах атома векторний потенціал змінюється мало і можна знехтувати зміною атомних хвильових функцій, а взаємодію поля зі спіновим моментом електрона не розглядати, то в представленні вторинного квантування гамільтоніану системи невзаємодіючих електронів можна надати вигляду [1]

$$\hat{H} = \sum_i \varepsilon_i a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} e^{i\frac{e}{\hbar c}\bar{A}_j(\bar{R}_i - \bar{R}_j)} V_{ij} a_i^\dagger a_j + e.c., \quad (4)$$

де $a_i^\dagger (a_i)$ – оператор народження (знищення) електрона на вузлі i , ε_i – енергія електрона на i -тому вузлі, V_{ij} – матричний елемент переходу електрона з i -ого вузла на j -тий, $\bar{R}_i(\bar{R}_j)$ – двовимірний радіус-вектор (j)-ого вузла, \bar{A}_j – значення векторного потенціалу на вузлі j .

Задачі квантової механіки електронів, що одночасно знаходяться в зовнішньому магнітному полі і в періодичному потенціалі по суті зводиться до двовимірних, оскільки рух у напрямку магнітного поля

описується тривіально, якщо поле напрямлене вздовж вектора ґратки. Вибираючи векторний потенціал у вигляді $\vec{A}(0, Hx, 0)$, що відповідає магнітному полю B , напрямленому вздовж осі OZ , і враховуючи вплив лише найближчих сусідів, зведемо гамільтоніан (4) до такого вигляду

$$\hat{H} = \sum_i \epsilon_i^n a_i^+ a_i + \frac{1}{2} \sum_{n,i} e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} n} V_1 a_{i+1,n}^+ a_{i,n} + \sum_{n,i} V_2 a_{i,n}^+ a_{i,n+1} + e.c., \quad (5)$$

де i нумерують вузли в ланцюжках паралельних до векторного потенціалу, n нумерує ланцюжки, Φ – магнітний потік через елементарну комірку двовимірної ґратки, перпендикулярної до магнітного поля, $\Phi_0 = hc/e$ – квант магнітного потоку, $V_1 (V_2)$ – матричний елемент переходу між вузлами ланцюжка (різних ланцюжків).

Для дослідження енергетичного спектра розглянемо функцію Гріна

$$G_{i,j}^{n,m}(E) = \langle\langle a_{i,n}, a_{j,m}^+ \rangle\rangle, \quad (6)$$

рівняння для якої з гамільтоніаном (5) в енергетичному представленні має вигляд

$$EG_{i,j}^{n,m}(E) = \delta_{i,j} \delta_{n,m} + \epsilon_i^n G_{i,j}^{n,m}(E) + V_1 e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} n} G_{i-1,j}^{n,m}(E) + V_1^* e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} n} G_{i+1,j}^{n,m}(E) + V_2 G_{i,j}^{n+1,m}(E) + V_2^* G_{i,j}^{n-1,m}(E). \quad (7)$$

Враховуючи, що енергія електрона на i -ому вузлі n -ого ланцюжка ϵ_i^n є величиною випадковою, запишемо її у такому вигляді $\epsilon_i^n = \epsilon_0 + \Delta\epsilon_i^n$, де $\epsilon_0 = \langle \epsilon_i^n \rangle$ – усереднена за всіма вузлами енергія електрона, $\Delta\epsilon_i^n$ – флуктуації енергії на i -ому вузлі n -го ланцюжка.

Здійснивши перехід у k -простір, одержимо рівняння для функції Гріна

$$G_{k,k'}^{n,m}(E) = \frac{1}{N} \sum_{i,j} e^{-ikR_i} G_{i,j}^{n,m}(E) e^{ik'R_j} \quad (8)$$

(R_i, R_j тут напрямлені вздовж паралельних ланцюжків),

$$\left(E - \epsilon_0 - 2V_1 \cos(k - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} n) \right) G_{k,k'}^{n,m}(E) = \delta_{k,k'} \delta_{n,m} + V_2 G_{k,k'}^{n+1,m}(E) + V_2^* G_{k,k'}^{n-1,m}(E) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k^*} \Delta\epsilon_{k-k^*}^n G_{k,k'}^{n,m}(E), \quad (9)$$

у яких $\Delta\epsilon_{k-k^*}^n$ – фур'є-компонента флуктуації енергії на вузлі.

Ці рівняння пов'язують функції Гріна $G_{k,k'}^{n,m}(E)$ з функціями $G_{k,k'}^{n+1,m}(E)$ і $G_{k,k'}^{n-1,m}(E)$ і містять доданки, що враховують флуктуації енергії електрона на вузлах.

Оскільки експериментально спостерігаються усереднені характеристики макроскопічної системи, то розглянемо усереднені за всіма можливими флуктуаціями енергії функції Гріна, рівняння для яких одержимо, здійснюючи конфігураційне усереднення рівнянь (9):

$$\left(E - \epsilon_0 - 2V_1 \cos(k - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} n) \right) \overline{G_{k,k'}^{n,m}(E)} = \delta_{k,k'} \delta_{n,m} + V_2 \overline{G_{k,k'}^{n+1,m}(E)} + V_2^* \overline{G_{k,k'}^{n-1,m}(E)} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k^*} \overline{\Delta\epsilon_{k-k^*}^n G_{k,k'}^{n,m}(E)}. \quad (10)$$

Ці рівняння містять величини $\overline{\Delta\epsilon_{k-k^*}^n G_{k,k'}^{n,m}(E)}$, які для замкнення системи (10) слід виразити через $\overline{G_{k,k'}^{n,m}(E)}$. Для цього кожне з рівнянь

(9) поділимо на відповідні вирази $E - \varepsilon_0 - 2V_1 \cos(k - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} n)$ і

домножимо на відповідні $\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n$, а потім усереднимо. Тоді

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot G_{k^*,k}^{n,m}}(E) &= \frac{V_2}{E - \varepsilon_0 - 2V_1 \cos(k^* - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} n)} \overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot G_{k^*,k}^{n \pm 2,m}} + \\ &+ \frac{V_2}{E - \varepsilon_0 - 2V_1 \cos(k^* - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} n)} \overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot G_{k^*,k}^{n-1,m}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k^*} \frac{\overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot \Delta \varepsilon_{k^*-k}^n \cdot G_{k_1,k}^{n,m}}(E)}{E - \varepsilon_0 - 2V_1 \cos(k^* - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} n)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Проте система (11) містить нові конструкції $\overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot G_{k^*,k}^{n+1,m}}$ і $\overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot G_{k^*,k}^{n-1,m}}$, для яких слід також написати відповідні рівняння. В них знову будуть конструкції типу $\overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot G_{k^*,k}^{n \pm 2,m}}$, які можна не враховувати, якщо обмежитися наближенням найближчих сусідів для взаємодії між ланцюжками. Використовуюючи для величин $\overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot \Delta \varepsilon_{k^*-k}^n \cdot G_{k_1,k}^{n,m}}(E)$ наближення, яким часто послуговуємось в теорії аморфних магнетиків та невпорядкованих фононних і спінових систем [7,8]

$$\frac{1}{N} \sum_{k^*} \overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot \Delta \varepsilon_{k^*-k_1}^n \cdot G_{k_1,k}^{n,m}}(E) \approx \frac{1}{N} \overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot \Delta \varepsilon_{k^*-k}^n \cdot G_{k_1,k}^{n,m}}(E),$$

знайдемо, що

$$\overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot G_{k^*,k}^{n+1,m}} = \frac{V_2}{E - \varepsilon_0 - 2V_1 \cos(k^* - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} (n+1))} \overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot G_{k^*,k}^{n,m}}(E),$$

$$\overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot G_{k^*,k}^{n-1,m}} = \frac{V_2}{E - \varepsilon_0 - 2V_1 \cos(k^* - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} (n-1))} \overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot G_{k^*,k}^{n,m}}(E).$$

Підставляючи останні співвідношення у (11) і враховуючи розщеплення в третьому доданку, прийдемо до такого рівняння для функцій Гріна

$$\begin{aligned} \overline{G_{k,k}^{n,m}}(E) &= \overline{G_{k,k}^{n,m}}(E) \left(E - \varepsilon_0 - 2V_1 \cos(k^* - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} n) - \sum_k^{(n)}(E) \right) - V_2 \overline{G_{k,k}^{n+1,m}}(E) - \\ &- V_2 \overline{G_{k,k}^{n-1,m}}(E) = \delta_{k,k} \delta_{n,m}, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\sum_k^{(n)}(E) = \frac{1}{N} \times$$

$$\sum_{k^*} \frac{\overline{\Delta \varepsilon_{k-k^*}^n \cdot \Delta \varepsilon_{k^*-k}^n}}{(E' - 2V_1 \cos(k^* - \alpha n)) - \frac{|V_2|^2}{E' - 2V_1 \cos(k^* - \alpha(n+1))} - \frac{|V_2|^2}{E' - 2V_1 \cos(k^* - \alpha(n-1))}}. \quad (13)$$

$$\alpha = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \text{ і } E' = E - \varepsilon_0.$$

Члени $\sum_k^{(n)}(E)$ відповідають другому порядку теорії збурень за флуктуаціями енергії електрона на вузлі $\Delta \varepsilon_k^n$. Вважаючи їх малими, можна припустити, що $\sum_k^{(n)}(E)$ є невеликим додатком до E і відіграє ту ж роль, що і масовий оператор у теорії поля. Для виділення особливості, що її має масовий оператор, візьмемо $E = E + i\delta$, що відповідає запізнюючій функції Гріна. Тоді

$$\Sigma_k^{(n)}(E) = \Sigma_k^{(n)}(E) - i \Sigma_k^{(n)}(E)'' \quad (14)$$

Дійсна частина масового оператора визначається виразом (13), в якому інтегрування по k слід виконувати в сенсі головного значення. Уявна ж частина є суттєвою для визначення затухання електронних збуджень спектра.

У вирази для дійсної та уявної частини масового оператора входить конфігураційно усереднена величина $\overline{\Delta \epsilon_{k-k}^n \cdot \Delta \epsilon_{k^*-k}^n}$, яку при використанні для усереднення вагової функції Гаусса

$$f(\Delta \epsilon_i^n) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(\Delta \epsilon_i^n)^2}{2\sigma}} \quad (15)$$

можна привести до такого вигляду:

$$\overline{\Delta \epsilon_{k-k}^n \cdot \Delta \epsilon_{k^*-k}^n} = \langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle \quad (16)$$

Енергетичний спектр системи визначається полюсами функції Гріна $\overline{G_{k,k}^{n,m}(E)}$, які є нулями детермінанта, складеного із коефіцієнтів рівняння (12). Вважаючи затухання малим, одержимо для спектра

$$\begin{vmatrix} E - \epsilon_0 - 2V_1 \cos\left(k^* - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} 1\right) - \Sigma_k^{(1)}(E) & -V_2 & 0 & \dots \\ -V_2^* & E - \epsilon_0 - 2V_1 \cos\left(k^* - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} 2\right) - \Sigma_k^{(2)}(E) & -V_2 & \dots \\ 0 & -V_2^* & E - \epsilon_0 - 2V_1 \cos\left(k^* - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} 3\right) - \Sigma_k^{(3)}(E) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

Одержане таким чином рівняння є рівнянням порядку n відносно E . Безпосереднім обчисленням його можна розв'язати лише для найпростіших випадків. Зокрема, при $n=2$ для спектра одержуємо

$$E(k) = \epsilon_0 + V_1 \cos\left(k - 4\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + V_1 \cos\left(k - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \pm \sqrt{V_1^2 \left(\cos\left(k - 4\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 - 2 \cos\left(k - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \cdot \cos\left(k - 4\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + \cos\left(k - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 \right) + |V_2|^2} \quad (18)$$

Для вищих порядків рівняння (17) можна розв'язати лише чисельно. Нижче представлено результати аналізу спектра при $n=5$, реалізованого з допомогою програмного продукту "MathCad 7.0". З використанням можливостей даного пакета здійснено аналітичні перетворення визначника для одержання рівняння. Далі, послуговуючись стандартною функцією "polyroots", знайдено його корені при фіксованому значенні магнітного потоку через елементарну комірку та їх екстремальні значення. На основі одержаних розв'язків при різних значеннях Φ/Φ_0 сформовано масиви даних для графічного представлення результатів. Графіки дають залежність ширини підзон енергії як функції магнітного потоку через

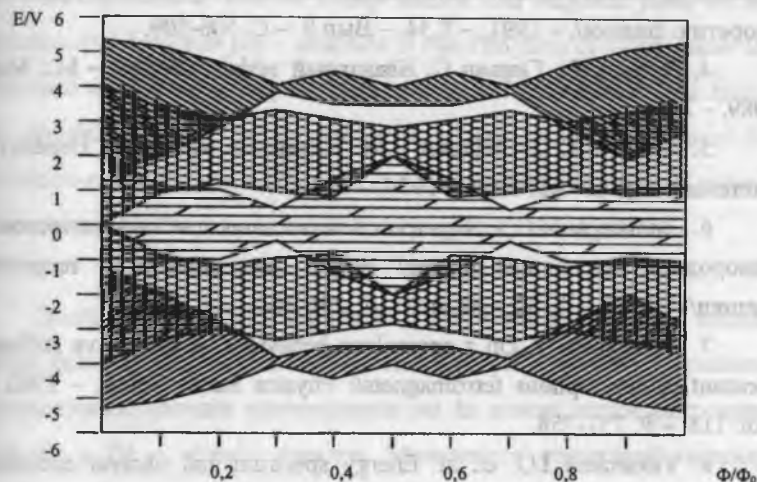


Рис. 1. Енергетичні зони n 'яти ланцюжків атомів у магнітному полі як функція магнітного потоку через елементарну комірку ґратки.

елементарну комірку, виміряну в одиницях кванта магнітного потоку $\Phi = hc/e$ в інтервалі від $\Phi/\Phi_0=0$ до $\Phi/\Phi_0=1$.

Відмітимо, що в квадратичному наближенні за флуктуаціями поправка до спектра відсутня, але має місце його затухання. Крім того, для спектра характерне розбиття на підзони, відстань між якими залежить від величини магнітного потоку через елементарну комірку. При деяких значеннях потоку спостерігається злиття підзон.

1. Lin Y-L., Nori F. Strogly localised electrons in a magnetic field: Exact results on quantum interference and magnetoconductance// Physical Review Letters. – 1996. – Vol. 76. – P. 4580-4583.

2. Нгуен В.Л. и др. Туннельные прыжки в неупорядоченной системе// Журн. эксперимент. и теоретич. физики. – 1985. – Т.89. – Вып. 5(11). – С. 1770-1784.

3. Богачек Э.Н., Криве И.К. Осцилляции Ааронова-Кашера в мезоскопических магнитных кольцах// Письма в журн. эксперимент. и теоретич. физики/. – 1991. – Т.54. – Вып.9. – С. 506-509.

4. Прендж Р., Гирвин С. Квантовый эффект Холла. – М.: Мир, 1989. – 731 с.

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – М.: Наука, 1974. – 752 с.

6. Зильберман Г.Е. Электрон в периодическом электрическом и однородном магнитном полях// Журн. эксперимент. и теоретич. физики/. – 1957. – Т. 32. – Вып.2. – С. 296-304.

7. Kaneyoshi T. On a anomalous behaviour of spin-wave stiffness constant in amorphous ferromagnets// Physica Status Solidi. – 1983. – Vol. 118. – P. 751-758.

8. Vakarchuk I.O. et. al. Energy spectrum and phonon excitation damping in many-component amorphous solids// Physica Status Solidi (b). – 1991. – Vol.196. – P. 53-67.

Б.М.Рувінський, М.А.Рувінський

ВПЛИВ ЕЛЕКТРИЧНОГО І МАГНІТНОГО ПОЛІВ НА ПРОЦЕС ІЗОТЕРМІЧНОГО ВІДПАЛУ У ВАКУУМІ ТОНКИХ ПЛІВОК РЬS

Досліджено теоретично вплив зовнішніх постійних електричного і магнітного полів на формування двошарової p-n – структури в тонких плівках PbS p-типу при ізотермічному вакуумному відпалі. Одержано просторово-часовий розподіл концентрації носіїв струму при урахуванні генераційно-рекомбінаційного механізму та амбіполярної дифузії вакансій сірки й електронів в електричному і магнітному полях.

The influence of external steady electric and magnetic fields on the formation of a two-layer p-n – structure in thin PbS films of p-type under the isothermal vacuum annealing has been investigated theoretically. The space-time distribution of the carrier concentration with taking into account the generation-recombination mechanism and the ambipolar diffusion of sulphur vacancies and electrons in the electric and magnetic fields is obtained.

Дослідження закономірностей вакуумного відпалу тонких плівок халькогенідів свинцю [1-4] є актуальним у зв'язку з розробкою технологічних методів виготовлення на їх основі оптоелектронних приладів в ІЧ – області спектра. Можливість стимуляції окремих стадій процесу відпалу за рахунок поєднання термічних і нетермічних дій дозволила б підвищити ефективність цього процесу для створення

потрібних для мікроелектроніки структур з необхідними електрофізичними параметрами.

У даній роботі показано теоретично, що використання зовнішнього електричного і магнітного полів у процесі ізотермічного вакуумного відпалу тонких плівок PbS, коли утворюється двошарова р-п – структура, дозволяє суттєво змінювати профіль розподілу носіїв струму в залежності від величини і напрямку електричного і магнітного полів.

У роботах [2-4] було запропоновано модель і одержано вираз для просторово-часового розподілу концентрації носіїв заряду в ізотермічно відпалених (при відсутності зовнішніх полів) у вакуумі тонких плівок PbS [1], коли профіль дійсної концентрації [3] носіїв струму, як і кінетику ефективної концентрації і рухливості [2,4], можна пояснити генераційно-рекомбінаційним механізмом [5] та амбіполярною дифузєю [6] вакансій сірки і неосновних носіїв. Розглянуті в [2-4] теоретична модель і механізми формування двошарової р-п – структури покладені також в основу наступного розгляду процесу ізотермічного відпалу плівок PbS при наявності зовнішнього постійного електричного або (і) магнітного поля. Внаслідок збіднення приповерхневого шару плівки сіркою при відпалі у вакуумі і утворення градієнта концентрації, вакансій сірки V_S^+ і електрони дифундують в об'єм плівки в умовах додаткової стимуляції полем, що і призводить до дифузійно-дрейфового поширення п-області від вільної поверхні плівки до підкладки протягом часу відпалу.

Для заданої температури відпалу у нелегованій плівці врахуємо лише наявність власних іонізованих дефектів [7]: вакансій свинцю

V_{Pb}^- і сірки V_S^+ з концентраціями n_1 і n_2 та міжвузлових атомів Pb_i^+ і S_j^0 з концентраціями N_1 і N_2 відповідно. Маючи на увазі, що у зразках р-типу коефіцієнт дифузії вакансій сірки суттєво перевищує коефіцієнт дифузії вакансій свинцю [7], припускаємо, що вирішальну роль у формуванні профілю концентрації носіїв заряду відіграє коефіцієнт дифузії вакансій сірки. У випадку амбіполярної дифузії вакансій сірки V_S^+ й електронів з поверхні в глибину плівки можна вважати, що в кожний момент часу відпалу виконується умова локальної електронейтральності

$$p + n_1 = p + n_2 + N_1, \quad (1)$$

причому

$$n_1 = N_1 + n_1^0, \quad n_2 = N_2 + n_2^0, \quad (2)$$

n_1^0, n_2^0 – концентрації нестехіометричних дефектів типу V_{Pb}^- і V_S^+ . З (1), (2) випливає, що

$$p - n = n_1^0 - n_2^0. \quad (3)$$

З урахуванням лінійного генераційно-рекомбінаційного механізму і зовнішнього постійного електричного поля $E = E_x i$, напрямленого вздовж товщини плівки x (напрямок неоднорідності системи), будемо мати рівняння:

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = \lambda_2 + D_2 \frac{\partial^2 n_2}{\partial x^2} - \alpha_2 n_2 - \mu E_x \frac{\partial n_2}{\partial x}, \quad (4)$$

де λ_2 – швидкість теплового утворення вакансій сірки, α_2 – коефіцієнт лінійної рекомбінації, D_2 – коефіцієнт дифузії вакансій сірки як менш рухомої компоненти при амбіполярній дифузії (порівняно з електронами), μ – біполярна дрейфова рухливість [6],

$$\mu = (n - n_2) / \left[(n / \mu_2) + (n_2 / \mu_n) \right], \quad (5)$$

μ_2 – рухливість вакансій сірки, μ_n – рухливість електронів. Оскільки в (4) враховано при визначенні λ_2 , D_2 і α_2 , що $\mu_2 \ll \mu_n$ і $n \sim n_2$, то

$$\mu \approx \frac{n - n_2}{n} \mu_2. \quad (5')$$

Початкові й крайові умови для $n_2(x, t)$ визначаються співвідношеннями

$$n_2(x, 0) = f, \quad 0 < x < d, \quad (6)$$

$$n_2(0, t) = M_1, \quad n_2(d, t) = M_2, \quad t > 0. \quad (7)$$

Тут f , M_1 , M_2 – сталі величини ($M_2 > M_1$, f), $x=0$ відповідає межі підкладка-плівка, d – товщина плівки.

Використовуючи точний розв'язок крайової задачі (4), (6), (7) при $\mu = \text{const}$ і формулу (3), одержимо просторово-часовий розподіл концентрації носіїв заряду в плівці при наявності зовнішнього електричного поля:

$$p - n = n_1^0 - u - \exp(\delta x) \left\{ \frac{(M_1 - u) \text{sh} \gamma d \left(1 - \frac{x}{d} \right) + (M_2 - u) \exp(-\delta d) \text{sh} \gamma x}{\text{sh} \gamma d} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp \left[-D_2 \left[\gamma^2 + \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 \right] t \right] \sin \frac{m\pi}{d} x \right\}, \quad (8)$$

де

$$A_m = \frac{2m\pi(f - u)}{(m\pi)^2 + (\delta d)^2} \left[1 - (-1)^m \exp(-\delta d) \right] - \frac{2m\pi}{(m\pi)^2 + (\gamma d)^2}.$$

$$\cdot \left[(M_1 - u) - (-1)^m (M_2 - u) \exp(-\delta d) \right], \quad (9)$$

$$\delta = \frac{\mu E_x}{2D_2}, \quad \gamma = \sqrt{\delta^2 + \frac{\alpha_2}{D_2}} > 0, \quad u = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}. \quad (10)$$

Формули (8)-(10) визначають профіль концентрації носіїв заряду в умовах, коли можна нехтувати зміною концентрації нестехіометричних вакансій свинцю n_1^0 порівняно зі зміною концентрації вакансій сірки n_2 , а також при сталій біполярній рухливості (5'), що має місце при виконанні нерівностей

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \frac{n_2}{n} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{n_2}{n} \right| \ll \left| 1 - \frac{n}{n_2} \right|, \quad (11)$$

де $\xi = x/d$, $\eta = t/\tau$, τ – характерний часовий масштаб дифузійно-дрейфового руху. При відсутності зовнішнього електричного поля $u = 0$, коли $\delta = 0$ і $\gamma = \sqrt{\alpha_2/D_2}$, формули (8), (9) дають раніше отриманий результат [3]. Вплив електричного поля стає помітним при

$$|\delta| \geq \frac{1}{d}, \quad |\delta| \geq \sqrt{\frac{\alpha_2}{D_2}}. \quad (12)$$

Згідно з [1,3], для тонких плівок PbS при температурі відпалу $T = 643\text{K}$ $\sqrt{\alpha_2/D_2} \sim \frac{1}{d}$. Із співвідношення Ейнштейна [6] між рухливістю μ і коефіцієнтом дифузії вакансій сірки при $\mu \sim \mu_2 = eD_2/kT$ з (10), (12) випливає, що повинно бути

$$|\delta| \cdot d \sim \frac{e|E_x|d}{kT} = \frac{eU}{kT} \geq 1, \quad (13)$$

де e – елементарний заряд, k – стала Больцмана, U – напруга на товщині плівки. Для заданої температури відпалу $U \geq 0.1$ В. Вплив електричного поля на стаціонарний розподіл концентрації носіїв заряду залежить від знака параметра δ , який визначається напрямом електричного поля і співвідношенням між концентрацією електронів n і концентрацією вакансій сірки n_2 в зразку р-типу. При $\delta < 0$ відбувається дифузійно-дрейфовий рух вакансій сірки й електронів у глибину плівки (поширення n -області до підкладки), що має місце при $E_x > 0$ і $n < n_2$ або при $E_x < 0$ і $n > n_2$ (див. формули (5), (5') і (10)). Зі збільшенням напруженості зовнішнього електричного поля зменшується час відпалу, необхідний для утворення р-п-структури. Співвідношення між характерними часовими масштабами кінетики відпалу $\tau(E_x)$ і $\tau(0)$ при наявності й відсутності електричного поля, згідно з (8), (10), має вигляд:

$$\frac{1}{\tau(E_x)} - \frac{1}{\tau(0)} = \frac{(\mu E_x)^2}{4D_2} > 0. \quad (14)$$

Наведені результати свідчать про принципову можливість експериментального спостереження впливу електричного поля на просторово-часовий розподіл концентрації носіїв заряду при ізотермічному відпалі у вакуумі тонких плівок.

При наявності не тільки електричного, але й магнітного поля, дифузійно-дрейфовий рух у плівці має більш складний характер. Найбільш цікавим є випадок, коли “тягнуче” електричне поле і градієнти концентрацій ∇n , ∇n_2 перпендикулярні магнітному полю H , напрямленому вздовж осі z . Враховуючи, як і раніше, що ∇n , ∇n_2 і “тягнуче” електричне поле (E_x) направлені вздовж товщини плівки (вісь x), замість (4), будемо мати рівняння:

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = \lambda_2 + D_2 \frac{\partial^2 n_2}{\partial x^2} - \alpha_2 n_2 - (\mu_n E_y + \mu_{\perp} E_x) \frac{\partial n_2}{\partial x}, \quad (15)$$

де E_y – додаткове холлівське електричне поле, яке виникає в напрямі осі y ;

$$\mu_H = \frac{n\gamma_2 + n_2\gamma_n}{\frac{n}{\mu_2} + \frac{n_2}{\mu_n}} \quad (16)$$

- біполярна холлівська рухливість [6];

$$\mu_{\perp} = \frac{n - n_2}{\frac{n}{\mu_2} + \frac{n_2}{\mu_n}} \quad (17)$$

- біполярна дрейфова рухливість поперек магнітного поля;

$$\mu_2' = \frac{\mu_2}{1 + \gamma_2^2}, \quad \mu_n' = \frac{\mu_n}{1 + \gamma_n^2}; \quad (18)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{c} \mu_2 H, \quad \gamma_n = \frac{1}{c} \mu_n H; \quad (19)$$

$$D_2' = \frac{D_2}{1 + \gamma_2^2} \quad (20)$$

- коефіцієнт дифузії вакансій сірки в поперечному магнітному полі (при визначенні коефіцієнта біполярної дифузії в (20), λ_2 і α_2 в (15) враховано, що $\mu_2 \ll \mu_n$ і $p \sim n_2$); c – швидкість світла. З умови відсутності струму в напрямку осі y знайдемо холлівське електричне поле

$$E_y = - \frac{\gamma_n n \mu_n' - \gamma_2 n_2 \mu_2'}{n \mu_n + n_2 \mu_2} E_x. \quad (21)$$

Після підстановки (21) в (15) отримаємо рівняння, подібне до рівняння (4):

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = \lambda_2 + D_2 \frac{\partial^2 n_2}{\partial x^2} - \alpha_2 n_2 - \mu E_x \frac{\partial n_2}{\partial x}, \quad (22)$$

де

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu'_n \mu'_2}{n \mu'_n + n_2 \mu'_2} \left[n - n_2 - \frac{(\gamma_n n \mu'_n - \gamma_2 n_2 \mu'_2)(n \gamma_2 + n_2 \gamma_n)}{n \mu'_n + n_2 \mu'_2} \right]. \quad (23)$$

Профіль концентрації носіїв струму визначається тепер формулами (8)-(10), в яких слід провести заміну:

$$D_2 \rightarrow D'_2, \mu \rightarrow \tilde{\mu}, \delta \rightarrow \frac{\tilde{\mu} E_x}{2D'_2}. \quad (24)$$

Залежність від магнітного поля міститься в D'_2 і $\tilde{\mu}$. Зміна знаку рухливості $\tilde{\mu}$ відбувається при умові:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{n_2}{n} \right) \left[b(1 + \gamma_2^2) + \frac{n_2}{n} (1 + b^2 \gamma_2^2) \right] = \\ & = \gamma_2^2 \left(1 + b \frac{n_2}{n} \right) \left[b^2 (1 + \gamma_2^2) - \frac{n_2}{n} (1 + b^2 \gamma_2^2) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

де $b = \mu_n / \mu_2$. Оскільки $b \gg 1$, то при $n \sim n_2$ з (23) маємо

$$\tilde{\mu} \approx \mu'_2 \left[1 - \frac{n_2}{n} (1 + \gamma_n^2) \right]. \quad (26)$$

При відсутності “тягнучого” електричного поля ($E_x = 0$, $\delta = 0$, $\gamma = \sqrt{\frac{\alpha_2}{D'_2}}$) вплив самого магнітного поля виявляється непомітним, що пов’язано з тим, що практично $D'_2 \approx D_2$, внаслідок малих значень рухливості μ_2 і коефіцієнта дифузії D_2 вакансій сірки в реальних магнітних полях, коли $\gamma_2^2 \ll 1$ (в принципі магнітне поле в цьому випадку призводить до досить незначного сповільнення процесу відпалу, оскільки $D'_2 < D_2$, див. формули (19), (20)).

При одночасній наявності “тягнучого” електричного поля ($E_x \neq 0$) і поперечного магнітного поля останнє суттєво впливає на рухливість $\tilde{\mu}$ завдяки фактору γ_n^2 у формулі (26) ($\mu'_2 \approx \mu_2$, $\gamma_n^2 \gg \gamma_2^2$). У

залежності від величини магнітного поля рухливість $\tilde{\mu}$ може змінити свій знак, що дає додаткову можливість для керування процесом формування певного профілю концентрації носіїв струму в тонких плівках при ізотермічному відпалі у вакуумі.

1. Левченко В.Н., Постнова Л.И. Влияние вакуумного отжига на электрофизические свойства эпитаксиальных плёнок сульфида свинца // Изв. РАН. Неорган. Материалы. – 1996. – Т.32. - №9. – С. 1066-1068.

2. Ruvinskii B.M., Freik D.M., Ruvinskii M.A. The kinetics of annealing of intrinsic defects in thin films of lead chalcogenides // Physical problems in material science of semiconductors. Second international school-conference. – Chernivtsi, 1997. – P.90.

3. Руви́нський Б.М. Профіль розподілу концентрацій носіїв заряду в тонких плівках $A^{IV}B^{VI}$ при термічному відпалі // VI Міжнародна конференція з фізики і технології тонких плівок. Матеріали. Ч. I. – Івано-Франківськ, 1997. – С.101.

4. Руви́нський Б.М. Кінетика ефективної рухливості носіїв заряду в тонких плівках PbS при ізотермічному вакуумному відпалі // Вісник Прикарпат. ун-ту. Сер. природничо-математичних наук. – 1996. – Вип.2. – С. 147-151.

5. Винецкий В.Л., Холодарь Г.А. Статистическое взаимодействие электронов и дефектов в полупроводниках. – К.: Наук. думка, 1969. – 188 с.

6. Владимиров В.В. и др. Плазма полупроводников. – М.: Атомиздат. 1979. – 254 с.

7. Равич Ю.И. и др. Методы исследования полупроводников в применении к халькогенидам свинца PbTe, PbSe, PbS. – М.: Наука, 1968. – 384 с.

Б.К.Остафійчук, В.М.Пилипів, В.І.Кравець.

МОДЕЛЮВАННЯ СТРУКТУРИ ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ ЕПІТАКСІЙНИХ ПЛІВОК ЗАЛІЗО-ІТРІЄВОГО ГРАНАТУ, ІМПЛАНТОВАНИХ ІОНАМИ БОРУ

Монокристалічні плівки ЗІГ товщиною 0,49 мкм, імпантовані іонами В з енергією 80 кеВ в інтервалі доз $3 \cdot 10^{14} - 1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$, досліджені методом рентгенівської дифрактометрії та іншими методами. Обчислено профілі деформації приповерхневого шару. Виявлено, що при малих дозах до $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ профілі деформації немонотонні з максимумом на глибині $\sim 1500 \text{ \AA}$, що добре корелює з профілем концентрації імпантованих іонів. Завдяки знаходженню максимуму деформації в глибині плівки, аморфна фаза зароджується як на поверхні, так і в глибині. Виникає багатозарова структура. Поширюючись у різні боки, при великих дозах імпантованих іонів аморфізовані зони зливаються в одну.

Monocrystalline films of yttrium-iron garnet implanted by ions B⁺ with energy 80 keV and doses $3 \cdot 10^{14} - 1 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2}$ have been investigated by X-ray diffraction and other methods. Distortion profiles of presurface layer have been calculated. It is stated that distortion profiles for small doses up to $2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$ are nonmonotonous with the distortion maximum at $\sim 1500 \text{ \AA}$ depth and nicely correlates with concentration profile of

implanted ions. Owing to the location of the deformation maximum, the amorphous phase arises on and in the film. Thus the structure becomes multilayeral. If doses of implanted ions are big, amorphous zones widen in different directions and then merge.

Плівки залізо-ітрієвого гранату (ЗІГ) товщиною 0,49 мкм, вирощені методом рідкофазової епітаксії на підкладці галій-нідолінієвого гранату з площиною зрізу <111>, були імпантовані іонами В⁺ з енергією 80 кеВ на прискорювачі "Везувій-5" в геометрії, яка виключає каналювання.

Розрахований на основі динамічної теорії розсіювання рентгенівських променів з експериментальної кривої дифракційного відбивання профіль зміни міжплощинної відстані порушеного шару для дози $3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ виявився немонотонним із максимумом деформації на глибині $\sim 1700 \text{ \AA}$. Товщина порушеного шару становить близько 3000 \AA (рис.1).

Теоретично обчислений методом Монте-Карло профіль концентрації імпантованих іонів В⁺ характеризується середньою довжиною проективного пробігу $R=1800 \text{ \AA}$ та дисперсією $\Delta R_p=800 \text{ \AA}$ [1]. Порівняння отриманих профілів вказує на їх добру кореляцію. Товщина імпантованого шару практично збігається з товщиною деформованого шару, а це означає, що при даній дозі пружно деформований перехідний шар не утворюється. При цьому, внаслідок особливого положення іонів кисню в структурі гранату і їхньої порівняно малої маси, в основному руйнується аніонна підґратка,

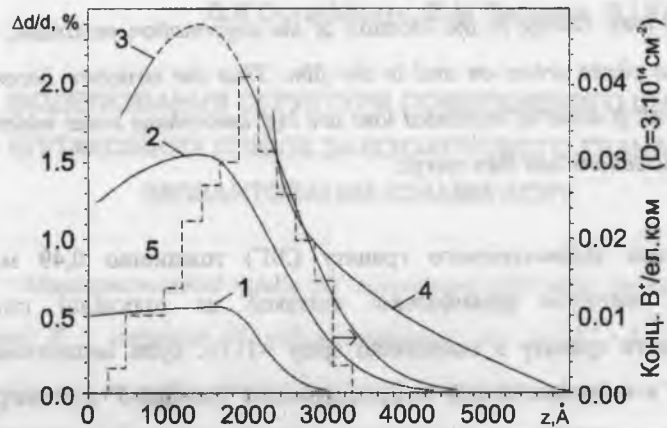


Рис. 1. Профілі деформації приповерхневих шарів плівок ЗГ, імплантованих іонами B^+ з енергією 80 кеВ і дозами $3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ (1), $1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ (2), $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ (3), $1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ (4), з врахуванням аморфізованих шарів та профіль концентрації імплантованих іонів (5).

через що енергія від іонів бору найефективніше передається саме аніонам. Як показано в [2] на прикладі ферит-гранатової плівки (ФГП) $Y_{1.76}Lu_{0.25}Sm_{0.17}Ca_{0.78}Pb_{0.04}Fe_{4.24}Ge_{0.76}O_{12}$, при низьких дозах бор в основному займає вузли аніонної підґратки, заміщуючи кисень або займаючи кисневі вакансії, які, можливо, містять неімплантовані плівки ЗГ [3]. У порушеному шарі в основному утворюються протяжні дефекти [1] вздовж треків імплантованих іонів.

Важливу інформацію може дати глибинна залежність відношення деформації порушеного шару до потоку імплантованих іонів через поперечний переріз елементарної комірки. Графіки цих залежностей наведені на рис.2.

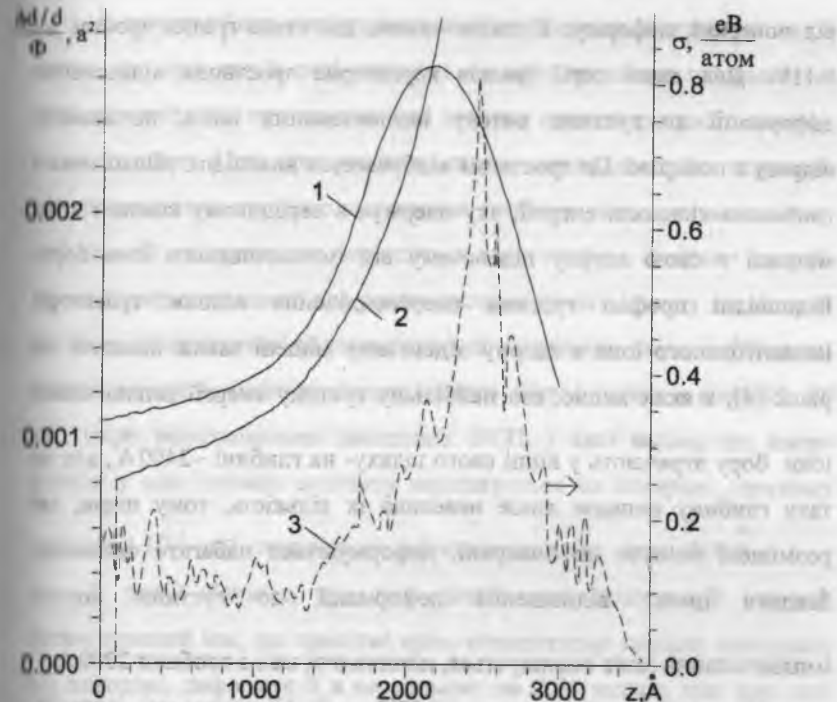


Рис. 2. Глибинні залежності відношення деформації до густини потоку імплантованих іонів бору для доз $1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ (1), $1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ (2) та профіль об'ємної густини енерговиділення вздовж траєкторії первинного іона в ядрі підсистемі мішені для випадку проникнення в $Y_3Fe_5O_{12}$ іонів B^+ [4]; а – параметр ґратки.

Оскільки при достатньо низьких дозах окремі дефекти не висмодіють між собою внаслідок великої відстані між треками імплантованих іонів, то відношення деформації порушеного шару до потоку імплантованих іонів у цьому випадку характеризує порушення, викликані одним окремо взятим іоном. Як бачимо з рис.2, важний іон бору, що пролітає крізь елементарну комірку неподалік

від поверхні, деформує її таким чином, що стала ґратки зростає на 0.11%. Для даної серії зразків характерне зростання відношення деформації до густини потоку імплантованих іонів, починаючи відразу з поверхні. Це зростання відбувається внаслідок збільшення з глибиною кількості енергії, яку одержує в середньому кожний атом матриці у свою ядерну підсистему від імплантованого іона бору. Відповідні профілі густини енерговиділення вздовж траєкторії імплантованого іона в ядерну підсистему мішені також наведені на рис.2 [4], з яких видно, що найбільшу густину енергії імплантовані іони бору втрачають у кінці свого шляху - на глибині $\sim 2400 \text{ \AA}$, але на таку глибину попадає лише невелика їх кількість, тому шари, які розміщені ближче до поверхні, деформуються набагато сильніше. Завдяки цьому відношення деформації до густини потоку імплантованих іонів зменшується, починаючи вже з глибини 2000 \AA .

При зростанні дози до $1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ імплантовані іони B^+ утворюють на своєму шляху набагато більше дефектів, концентрація яких стає достатньою для реалізації їхньої взаємодії. Максимальна деформація зростає до 1.55% і переміщується ближче до поверхні, оскільки на глибинах $1400\text{-}2200 \text{ \AA}$ напруги знімаються внаслідок часткової аморфізації порушеного шару, завдяки високій концентрації імплантованих іонів. Як видно з рис.1, глибинна залежність міжплощинної відстані порушеного шару для даної дози також має немонотонний характер, тобто деформація плівки біля поверхні дещо менша, ніж у глибині.

Із конверсійних електронних мессбауерівських спектрів заліза [1] видно, що при даній дозі наявною є слабо виражена парамагнітна фаза, що свідчить про виникнення тонкого приповерхневого аморфізованого шару. Цим припущенням також можна пояснити отримане при розрахунках профілю зменшення глибини залягання максимуму деформації: насправді він знаходиться дещо глибше, оскільки аморфізований шар невидимий для рентгеноструктурного методу дослідження. Дане припущення підтверджується наведеною нами в [5] динамічною моделлю імплантованого іонами бору з такою ж енергією 80 keV шару рідкоземельно заміщених ФТП, з якої видно, що аморфізація у цих плівках спочатку зароджується на поверхні, причому при дозі $1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ товщина аморфізованого шару сягає $\sim 100 \text{ \AA}$.

З рис.2 бачимо, що при даній дозі імплантації кожний імплантований іон, що пролітає крізь елементарну комірку неподалік від поверхні, деформує її в середньому на 25% менше, ніж при дозі $3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$. А якщо врахувати, що 5 іонів, які пролетіли крізь комірку біля поверхні при дозі $3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$, збільшили сталу ґратки на 0.5% (рис.1), то на кожний з решти 10 іонів, які додатково пролетіли крізь комірку при наборі дози до величини $1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$, припадає в середньому зростання сталої ґратки на 0.07%, тобто на третину менше, ніж на попередні іони. Це означає, що відстані між сусідніми треками імплантованих іонів достатньо малі (біля поверхні вони складають $\sim 3 \text{ \AA}$) для взаємодії дефектів, утворених різними треками. Ефективний діаметр треку іона бору, всередині якого відбувається вибивання атомів матриці зі своїх вузлів, можна вважати більшим 3 \AA .

Деяке зміщення профілю деформації в бік поверхні й утворення тонкого приповерхневого аморфізованого шару можна ще пояснити стіканням атомів бору до поверхні, стимульованим тим, що іони бору схильні займати аніонні вузли, а біля поверхні плівки концентрація аніонних вакансій внаслідок виходу деякої частини атомів кисню за межі кристалу під впливом іонного бомбардування, є максимальною.

Товщина порушеного шару зростає до $\sim 4000 \text{ \AA}$, хоч іони B^+ на таку глибину практично не залітають. Це означає, що, внаслідок великої деформації приповерхневого шару, між імплантованим шаром та досконалою частиною плівки утворюється пружно деформований перехідний шар, деформація в якому виникає внаслідок невідповідності сталих ґратки.

В [6] показано, що при іонній імплантації бору в епітаксійні плівки радіаційне руйнування структури гранату має селективний характер і залежить від дози. При дозі $3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ в основному руйнується аніонна підґратка, тоді як при дозі $1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ спостерігається помітне розупорядкування катіонної підґратки від поверхні вглиб імплантованого шару. Характерно [2], що при низьких дозах бор в основному займає вузли аніонної підґратки, тоді як з подальшим ростом іонної імплантації частка атомів бору у вузлах зменшується, і, відповідно, зростає частка атомів бору, розподіленого по об'єму ґратки хаотично. Аналіз спектрів резерфордівського зворотного розсіювання (РЗР) іонів гелію, одержаних у режимі каналування і розорієнтації, показує, що при дозах $\leq 1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ в порушеному шарі протяжні дефекти переважають над точковими, а ступінь розупорядкування по глибині не перевищує в середньому 50%.

Профіль деформації має немонотонний характер, причому найбільш деформована його частина володіє досить значною аморфізацією (рис.1). Внутрішній повністю аморфізований шар має товщину порядку 1000 \AA . Як показує аналіз спектрів РЗР іонів He^+ , у порушеному шарі імплантованої дозою $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ плівки переважають точкові дефекти, а загальна товщина повністю аморфізованого шару складає $\sim 1400 \text{ \AA}$. Значить, решта $\sim 400 \text{ \AA}$ припадає на приповерхневий аморфізований шар. Отже, аморфна фаза, яка зародилась на поверхні, повільно просувається вглиб кристала, а поряд з нею на глибині $\sim 1500 \text{ \AA}$ виникає ще один аморфізований шар, товщина якого для дози $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ складає $\sim 1000 \text{ \AA}$.

Максимальна деформація кристалічної частини імплантованої дозою $1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ плівки у процесі імплантації змінилась мало, тобто процес аморфізації в імплантованих бором плівках ЗІГ розвивається поступово, по мірі зростання деформації до критичного значення. При даній дозі відбувається часткове розпилення поверхні плівки ЗІГ [7].

Виходячи з розподілу концентрації і валентного стану елементів по глибині порушеного внаслідок іонної імплантації приповерхневого шару ЗІГ, доходимо висновку, що в процесі імплантації відбувається також радіаційно стимульована дифузія кисню до поверхні плівки і частковий його вихід у вакуум, тобто в приповерхневому шарі плівки ЗІГ в результаті імплантації іонів бору з енергією 80 кеВ і дозою $1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ відбувається не тільки аморфізація та часткове розпилення поверхні плівки, але й відновлення заліза.

Таким чином, при імплантації плівок ЗІГ іонами В⁺ з енергією 80 кеВ, на поверхні зароджується аморфна фаза, яка поступово просувається вглиб кристала, причому аморфізація приповерхневого шару відбувається при деформації, значно меншій критичної. При досягненні в глибині кристала деформації ~2% аморфізація починається і там, поширюючись із зростанням дози як до поверхні, так і вглиб плівки, і, зрештою, внутрішній аморфний шар зливається з приповерхневим. На основі вищесказаного ми пропонуємо динамічну модель імплантованої іонами бору плівки ЗІГ, показану на рис.3.

Наведена модель є характерною для імплантованих іонами бору гранатових плівок. Підтвердженням їй є подібна модель для імплантованої такими ж іонами з такою ж енергією рідкоземельно заміщених ФГП складу $Y_{1.76}Lu_{0.25}Sm_{0.17}Ca_{0.78}Pb_{0.04}Fe_{4.24}Ge_{0.76}O_{12}$, показана нами в [5], яка відрізняється від моделі плівки ЗІГ тільки в деталях.

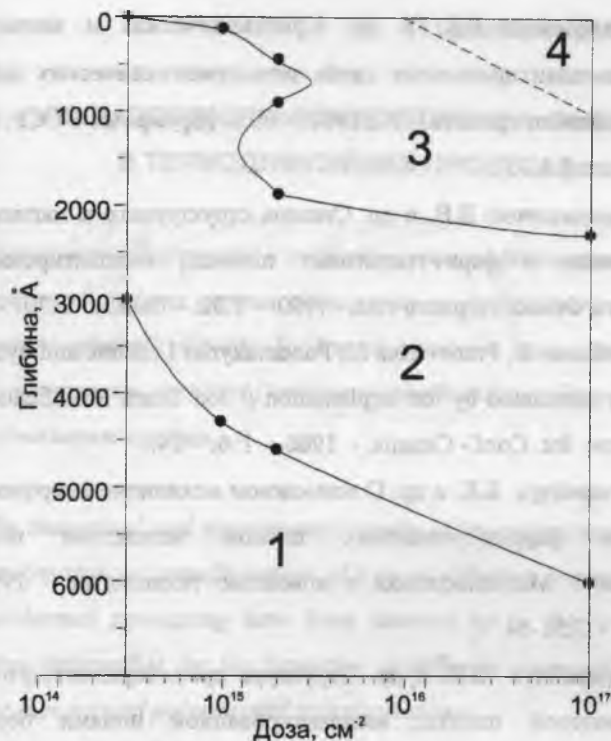


Рис. 3. Динамічна модель імплантованої іонами бору приповерхневого шару плівки ЗІГ ($E=80$ кеВ, $D = 3 \cdot 10^{14} - 1 \cdot 10^{17}$ см⁻²):

- 1 – досягнута частина плівки;
- 2 – кристалічна деформована фаза;
- 3 – аморфна фаза;
- 4 – розпилена частина плівки.

1. Остафійчук Б.К. и др. Кристаллическая и магнитная структура имплантированных слоёв монокристаллических плёнок железо-иттриевого граната. - К., 1991. - 69 с. (препр. АН УССР. Ин-т металлофизики; 1.91).
2. Немошкаленко В.В. и др. Степень структурного и магнитного разупорядочения в феррит-гранатовых плёнках, имплантированных ионами бора // Фізика твердого тіла. - 1990. - Т.32. - Вып.3. - С.707 - 713.
3. Joneliunas S., Pranevicius L., Puodziukynas L. Static and dynamic deformations stimulated by ion implantation // Ion Beam Modification of Materials: Proc. Int. Conf.- Catania, - 1986. - P.6. - 24.
4. Остафійчук Б.К. и др. О возможном механизме аморфизации поверхности феррит-гранатовых плёнок вследствие ионной имплантации // Металлофизика и новейшие технологии. - 1994. - Т.16. - № 8. - С.51-54.
5. Остафійчук Б.К. и др. Структура приповерхностного слоя феррит-гранатовой плёнки, имплантированной ионами бора // Металлофизика и новейшие технологии. - 1995. Т.17. - № 2. - С.67-72.
6. Немошкаленко В.В. и др. Структура феррит-гранатовых пленок, имплантированных ионами бора // Письма в ЖТФ. - 1989. - Т.15. - Вып.23. - С.33-37.
7. Немошкаленко В.В. та ін. Структура і властивості приповерхневого шару залізо-ітрієвого гранату, імплантованого бором // Доповіді АН УРСР. Сер.А. - 1988. - № 6. - С.45-48.

П.І. Мельник, Л.С. Кайкан

РОЛЬ ПОЛІМОРФНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЗАЛІЗА В ТЕРМОДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСАХ

Узагальнені теоретичні й експериментальні результати досліджень ролі поліморфних перетворень заліза на дифузійні процеси при його хіміко-термічній обробці. Зроблений висновок, що за формування дифузійних покриттів на залізі і сталях відповідальним є його природне поліморфне перетворення.

The theoretical and experimental results of investigations about the role of polymorphous transformation of iron in diffusion processes under chemical-thermal processing have been summed up in this work. It is shown that responsible for the formation of diffusion cover on iron and steels are their natural polymorphous transformations.

В основі поверхневого насичення заліза лежить явище масо-переносу, зумовлене температурним і концентраційним градієнтами. При ізотермічній витримці температурний градієнт зникає і діє лише концентраційний. Результатом аналізу діаграми стану двокомпонентних систем "залізо-насичуючий елемент" (Fe - н.е.) став висновок [1], що ті елементи, які на діаграмі стану утворюють вузькі замкнуті γ -області, формують на залізі дифузійні шари з високим ступенем повторюваності результатів. Фрагменти деяких систем такого типу наведені на рис.1. Насичення елементами, які на діаграмах стану Fe -

н.е. не утворюють замкнутої γ -області, або ж утворюють її в дуже широкому концентраційному інтервалі, характеризується відсутністю дифузійного шару, або формування його є нестабільним. Фрагменти такого типу діаграм стану наведені на рис.2.



Рис.1. Фрагменти діаграм стану Fe-н.е., в яких γ -область заліза замкнута у вузькому концентраційному інтервалі.

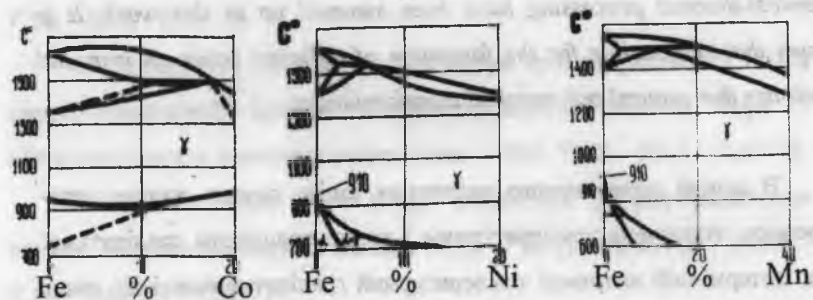


Рис.2. Фрагменти діаграм стану Fe-н.е., в яких відсутня замкнута γ -область у вузькому концентраційному інтервалі.

Для пояснення такої закономірності було зроблено припущення, що відповідальним за транспорт дифундуючих атомів насичуючого елементу з поверхні залізного зразка в глибину є природне

поліморфне перетворення заліза, яке в чистому залізі відбувається при температурі 910°C. В реальних технологічних процесах дифузійне насичення заліза і його сплавів проводять в інтервалі температур 950-1100°C. При цих температурах чисте залізо знаходиться в γ -модифікації і поліморфне перетворення $\gamma \rightarrow \alpha$ заліза при заданій ізотермі насичення відбувається за рахунок досягнення концентрації в поверхневому шарі атомів насичуючого елементу, яка відповідає замкнутій області γ -заліза. Перебудова кристалічної ґратки пов'язана з виникненням великої кількості невірноважених вакансій [2], що зумовлює різке зростання швидкості дифузії атомів насичуючого елементу, бо вакансійний механізм є найменш енергетично затратний.

Це твердження базується на порівняльному аналізі енергій активації E в α -залізі за найбільш поширеними механізмами дифузії - вакансійному і міжвузловому [3]. Розрахунки проводились у рамках єдиного підходу, який базується на оцінці енергетичних затрат для подолання напружень, які виникають в області локалізації дефекту внаслідок пружних спотворень кристалічної ґратки.

У наближенні пружної взаємодії з атомами ближнього оточення, енергія впровадження точкового дефекту в позицію \bar{r} кристалічної ґратки має вигляд [4,5]:

$$\epsilon_{\bar{r}} = \frac{1}{2} [v_0 \lambda_{ijlm} u^{\bar{r}}_{ij}(\bar{r}) - \sum_{\bar{r}} G^{\bar{r}}(\bar{r}) \Phi^{\bar{r}}(\bar{r})], \quad (1)$$

де λ_{ijlm} і $u^{\bar{r}}_{ij}(\bar{r})$ - тензори модулів пружності й коефіцієнтів концентраційного розширення ґратки;

v_0 - об'єм елементарної комірки.

З використанням у роботі [5] явного вигляду сил взаємодії дефекту з атомами найближчого оточення визначені компоненти тензора сил $\Phi^{ij}(\vec{r})$ [6] для тетра- і октаедричної позиції впровадження, а також позиції заміщення в ОЦК ґратці α -Fe.

При обчисленні компонент тензора Гріна $G^{ij}(\vec{r})$ [6] була використана формула Теварі [7]:

$$G^{ij}(\vec{r}) = \frac{\delta_{ij}}{4\pi\sqrt{c_{11}c_{44}}(r^2 + \gamma r_i^2)}; i, j = (x, y, z), \vec{r} \neq 0, \quad (2)$$

де $\gamma = (c_{44} - c_{11})/c_{11}$,

δ_{ij} - символ Кронеккера.

Для позиції $\vec{r} = 0$ використовувалась оцінка [6]:

$$G^{ij}(0)\Phi^{ij}(0) = \frac{3\hbar^2}{m(kT_D)^2} \sum_{ij} \Phi^{ij}(0)\delta_{ij}, \quad (3)$$

де T_D -характеристична температура Дебая.

У результаті компоненти тензорів $G^{ij}(\vec{r})$ і $\Phi^{ij}(\vec{r})$ виражаються через постійні пружності c_{11}, c_{12}, c_{44} і компоненти тензора коефіцієнтів розширення ґратки u^{ij} . Величини останніх оцінювались співвідношеннями:

$$u^{xx} = u_0^{xx} + k_1 \frac{\Gamma_A - \Gamma_B}{\Gamma_A}, u^{zz} = u_0^{zz} + k_2 \frac{\Gamma_A - \Gamma_B}{\Gamma_A},$$

де $u_0^{xx} = -0,10, u_0^{zz} = 0,86$ - відповідні значення для чистого α -Fe;

k_1, k_2 - коефіцієнти, які вибираються з експериментальних значень

[6]. Для α -заліза з домішками вуглецю $u^{xx} = -0,117; u^{zz} = 0,917; \Gamma_A, \Gamma_B$

- радіуси атомів основного й домішкового елемента відповідно.

Значення $\epsilon_{\vec{r}}$ вираховувались за розрахованими значеннями компонент тензорів $G(\vec{r}), \Phi(\vec{r}), u(\vec{r})$ і визначеними в роботі [8] модулями пружності.

У випадку дифузії за вакансійним механізмом енергія активації самодифузії оцінювалась значенням енергії формування вакансій в даному вузлі, а при дифузії домішки, крім цього, враховувалась різниця енергії бездефектної ґратки і ґратки з домішковим атомом заміщення. Врахування цієї поправки, пропорційної $\Gamma_A - \Gamma_B / \Gamma_A$, призводить до зниження значення потенціального бар'єру переходу атома домішкового елемента у вакантний вузол, зменшуючи тим самим енергію активації для домішкових атомів, розміри яких сильно відрізняються за розмірами від атомів заліза.

Енергія активації дифузії за міжвузловим механізмом визначалась найменшою із енергій впровадження в міжвузля. Розрахунки показують, що енергія активації дифузії по октаедричних пустотах в α -Fe значно менша, ніж по тетраедричних пустотах. Значення обидвох величин із ростом радіуса домішкового атома збільшується. Обидва ці висновки добре узгоджуються з експериментальними даними [9]. Результати розрахунків наведені в таблиці, де домішкові атоми розташовані в порядку зростання модуля різниці радіусів атомів домішкового й основного елемента.

Проведена оцінка енергетичних затрат на подолання пружних спотворень при дифузії домішкового атома в кристалічній ґратці α -Fe, що робить основний внесок у значення енергії активації, свідчить про те, що найбільш вірогідним механізмом дифузії є вакансійний. При створенні умов протікання фазових перетворень, що супроводжують-

ся появою великого числа дефектів кристалічної ґратки, відбувається швидке переміщення домішкових елементів у глибину насичуючої основи, при цьому ріст глибини дифузійного шару носить параболічний характер, що пояснюється стабілізацією з часом певного типу кристалічної ґратки і, відповідно, зменшенням концентрації вакансій до рівноважного значення. Подальший приріст глибини дифузійного шару зобов'язаний перерозподілу концентрації атомів домішкового елемента за будь-яким із можливих механізмів дифузії. Швидкість дифузії при цьому різко зменшується порівняно з дифузиею по неврівноважених вакансіях.

Стимулювання неврівноважених вакансій можна здійснювати шляхом термоциклювання в інтервалі температур, який охоплює температуру поліморфного перетворення заліза чи його сплаву. Таким способом були отримані дифузійні шари на залізі при насиченні його Zr, Nb, Mn, Cr, Ni [10]. У режимі термоциклювання ці шари на залізі формуються стабільно, тобто з високим ступенем повторюваності результатів. Термоциклювання в інтервалі температур 830-950°C при цементації заліза дозволило отримувати цементовані шари в 3-4 рази більші, ніж при ізотермічній витримці протягом того ж часу при 950°C.

Отже стимулювання процесу виникнення неврівноважених вакансій шляхом ініціювання фазових (поліморфних) перетворень є інтенсифікатором формування дифузійних захисних покриттів на залізі та його сплавах.

Розрахункові значення енергій активації E дифузії домішкового атому α -заліза за різними механізмами дифузії [10]

Домішка E_e, eV	Fe	Co	Ni	V	Si	Mo	W	Al	Ti	S	C
$E_{\text{ВВК}}$	0,8045	0,8044	0,8043	0,8015	0,8005	0,7955	0,7945	0,7895	0,7845	0,7796	0,6805
$E_{\text{ВСТ}}$	5,452	5,443	5,437	5,514	5,373	5,575	5,569	5,603	5,585	5,246	5,000
$E_{\text{ВТР}}$	8,161	8,157	8,158	8,187	8,131	8,207	8,208	8,219	8,227	8,082	7,987

1. Мельник П.И. Исследование роли фазовых превращений в процессе химико-термической обработки металлов // Химико-термическая обработка металлов и сплавов. – Минск: Наука и техника, 1981. – С.28-29.

2. Новик А. Аномалии диффузии в металлах // Новости физики твердого тела. – 1973. – №2. – С.23-39.

3. Старк Дж.П. Диффузия в твердых телах. – М.: Энергия, 1980. – 239 с.

4. Хачатурян А.Г. Теоретическое исследование энергии взаимодействия атомов внедрения, связанной с упругими искажениями кристаллической решетки // Фізика твердого тіла. – 1967. – 10. – №11. – С. 2861-2869.

5. Хачатурян А.Г. Теория фазовых превращений и структура твердых растворов. – М.: Наука, 1974. – 334 с.

6. Хачатурян А.Г., Шаталов Г.А. К вычислению энергии внедрения примесных атомов в октаэдрическую и тетраэдрическую позиции ОЦК решетки // Фізика металів і металообробки. – 1968. – Т. 25. – №3. – С. 637-646.

7. Марадудин А. и др. Динамическая теория кристаллических решеток в гармоническом приближении. – М.: Мир, 1965. – 360 с.
8. Rayne J.C., Chandrasekhar B.S. Elastic Constants of Iron from 4.2 to 300 K. // Phys. Rev. – 1961. – Vol. 122. – №2. – P. 1714-1716.
9. Бокштейн Б.С. Диффузия в металлах. – М.: Metallurgia, 1978. – 248 с.
10. Крамарь В.М., Мельник П.И. Исследование влияния термоциклирования на диффузионные процессы в металлах // Тезисы докл. XXIII семинара по диффузионному насыщению и защитным покрытиям. – Ивано-Франковск, 1990. – С. 166-167.

Л.Й.Межиловська, А.В.Лисак, Р.І.Запухляк, Г.Д.Матеїк,
Р.Я.Михайльонка

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ФАКТОРІВ ВИРОЩУВАННЯ І СКЛАДУ НА ЕЛЕКТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ТОНКИХ ПЛІВОК ТВЕРДИХ РОЗЧИНІВ $A^{IV}B^{VI}$

Метами математичного моделювання одержано рівняння регресії, які описують залежність електричних властивостей епітаксійних шарів твердих розчинів на основі сполук $A^{IV}B^{VI}$ від хімічного складу й температури осадження в методі гарячої стінки. Побудовано просторові діаграми і визначено області існування плівкового матеріалу р- та n-типів провідності із заданими концентраціями та рухливостями носіїв заряду.

The methods of math modelling have obtained regression equations epitaxial layers that describe the dependence of electrical properties of rigid solutions on connections $A^{IV}B^{VI}$ from the chemical structure and temperature of deposition by a hot wall method. The spatial diagrams are constructed and the areas of existence of a film material p- and n-type conductivity from specific concentration and mobility of carriers of a charge are determined.

Вступ.

Тверді розчини на основі сполук $A^{IV}B^{VI}$ є одним із основних матеріалів для створення детекторів і джерел когерентного випромінювання в інфрачервоній області оптичного спектра [1-2]. Вони приваблюють увагу дослідників можливістю їх використання в якості термоелектричного матеріалу для середньої області температур [4]. Окрім того, добра технологічність тонких плівок відкриває

можливість створення лінійок та матриць активних елементів [5-6]. Тому передбачення умов вирощування тонких плівок $A^{IV}B^{VI}$ із задалегідь заданими параметрами – важлива технологічна задача. В даній роботі отримано кількісні залежності електричних властивостей тонких плівок ряду твердих розчинів на основі з'єднань $A^{IV}B^{VI}$ від технологічних параметрів їх вирощування із парової фази методом гарячої стінки.

Методика експерименту.

Використовувались епітаксійні шари $Pb_xSn_{1-x}Te$; $PbTe_xSe_{1-x}$; $(PbTe)_x(SnSe)_{1-x}$; $(SnTe)_{1-x}(PbSe)_x$, які отримані осадженням із парової фази методом гарячої стінки на сколи (111) кристалів BaF_2 [5-7]. Товщина плівок складала ~ 8 мкм. Структура плівок досліджувалась методом рентгенівської двокристалльної спектрометрії [8,9]. Електричні параметри плівок визначалися потенціометрично в постійних магнітних та електричних полях [10].

Математичним плануванням і оптимізацією експерименту [11,12] знайдено у вигляді поліномів типу

$$y_0 = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 \quad (1)$$

залежність електричних властивостей тонких плівок (рухливість носіїв заряду μ , їх концентрація n) від технологічних параметрів (температура осадження $473 \leq T_n \leq 613$ К; склад твердих розчинів $0,0 \leq x \leq 0,1$). Температура випаровування $T_g = 823$ К та стінок камери $T_c = 853$ К були сталими.

Для перевірки гіпотез адекватності моделей та знаходження величин можливих інтервалів Δb_j використовувались значення моделей Фішера та Стьюдента при 5 % рівні значущості [11,12]. Коефіцієнти регресії, для яких $|\Delta b_j| \leq \Delta b_j$ не враховувались.

Експериментальні результати.

Рівняння, що описують зміни електричних властивостей тонких плівок в усьому досліджуваному інтервалі T_n та x , наведені в таблиці. Встановлено, що епітаксійні шари твердих розчинів $PbTe_xSe_{1-x}$ ($0,0 \leq x \leq 1,0$), $(SnTe)_{1-x}(PbSe)_x$ та $Pb_xSn_{1-x}Te$, а також $(PbTe)_x(SnSe)_{1-x}$ ($0,85 \leq x \leq 1,0$) при $T_n = 423$ К – 583 К характеризуються електронною провідністю. Підвищення температури осадження в цьому інтервалі призводить до зменшення концентрації електронів, росту їх холлівської рухливості (рис. 1-4). Для плівок $PbTe_xSe_{1-x}$ складу $0,0 \leq x \leq 0,4$ та $(SnTe)_{1-x}(PbSe)_x$, $(PbTe)_x(SnSe)_{1-x}$ складу $0,9 \leq x \leq 1,0$ при $T_n = 583$ К спостерігається не тільки зменшення концентрації електронів, зміни провідності з n- на p-тип, але й подальший ріст концентрації дірок (рис.1,2,4). Епітаксійні шари $(SnTe)_{1-x}(PbSe)_x$ та $Pb_xSn_{1-x}Te$ ($0,0 \leq x \leq 0,8$) в усьому досліджуваному інтервалі температур осадження мають тільки p-тип провідності. При цьому збільшення температури підкладок зумовлює зменшення концентрації дірок і ріст їх холлівської рухливості.

Аналіз рівнянь регресії (таблиця) вказує на те, що у вибраній області визначення параметрів зміна складу x епітаксійних шарів твердих розчинів істотніше впливає на властивості плівок, ніж температура осадження T_n . Це впливає з того, що коефіцієнти регресії b_2 (біля доданка для параметра, який відповідає за склад x) за модулем в усіх моделях перевищує значення b_1 (біля доданка для параметра, який відповідає за температуру T_n). Оскільки коефіцієнт b_{12} (біля доданка для добутку параметрів $T_n x$) набагато менше допустимого інтервалу Δb_j , можна висловити припущення, що для рухливості й концентрації носіїв заряду в плівках усіх твердих розчинів взаємодія параметрів відсутня.

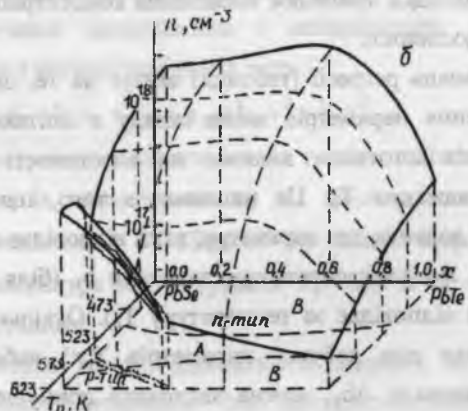
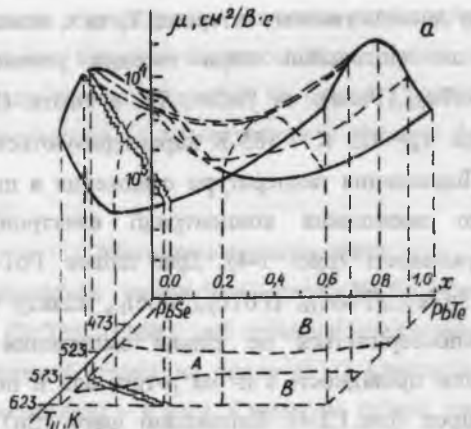


Рис.1. Просторові діаграми тонких плівок системи PbSe-PbTe.

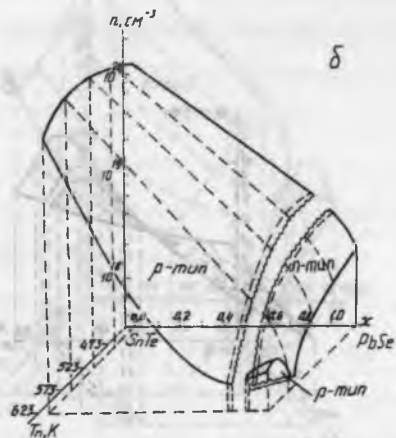
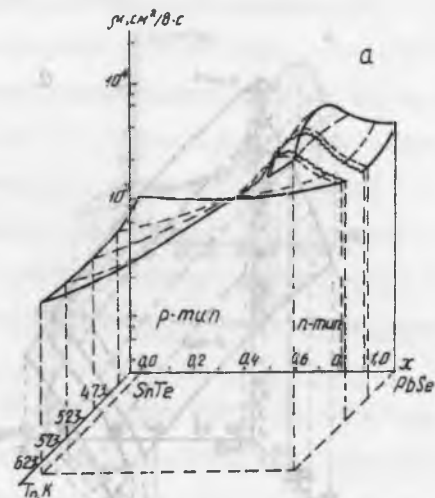


Рис.2. Просторові діаграми тонких плівок системи SnTe-PbSe.

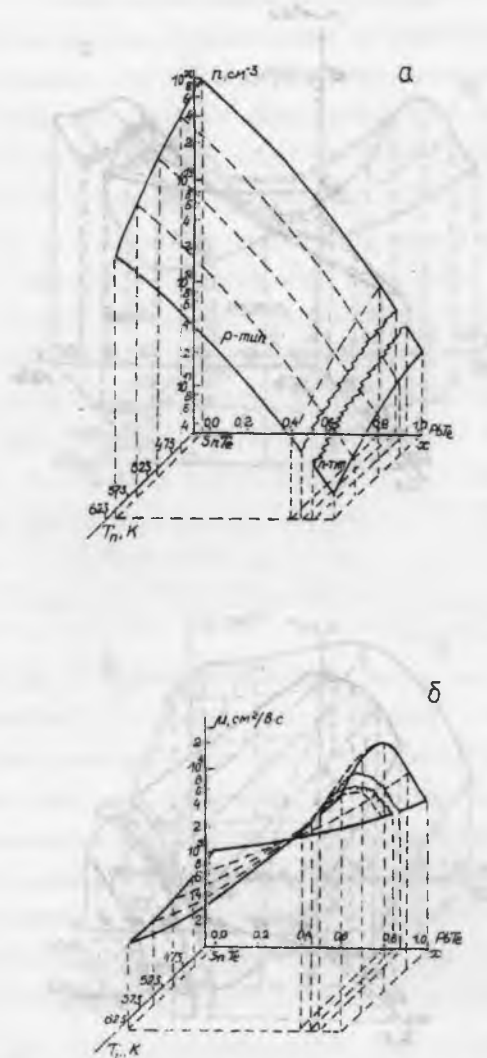


Рис.3. Просторові діаграми тонких плівок системи PbTe-SnTe .

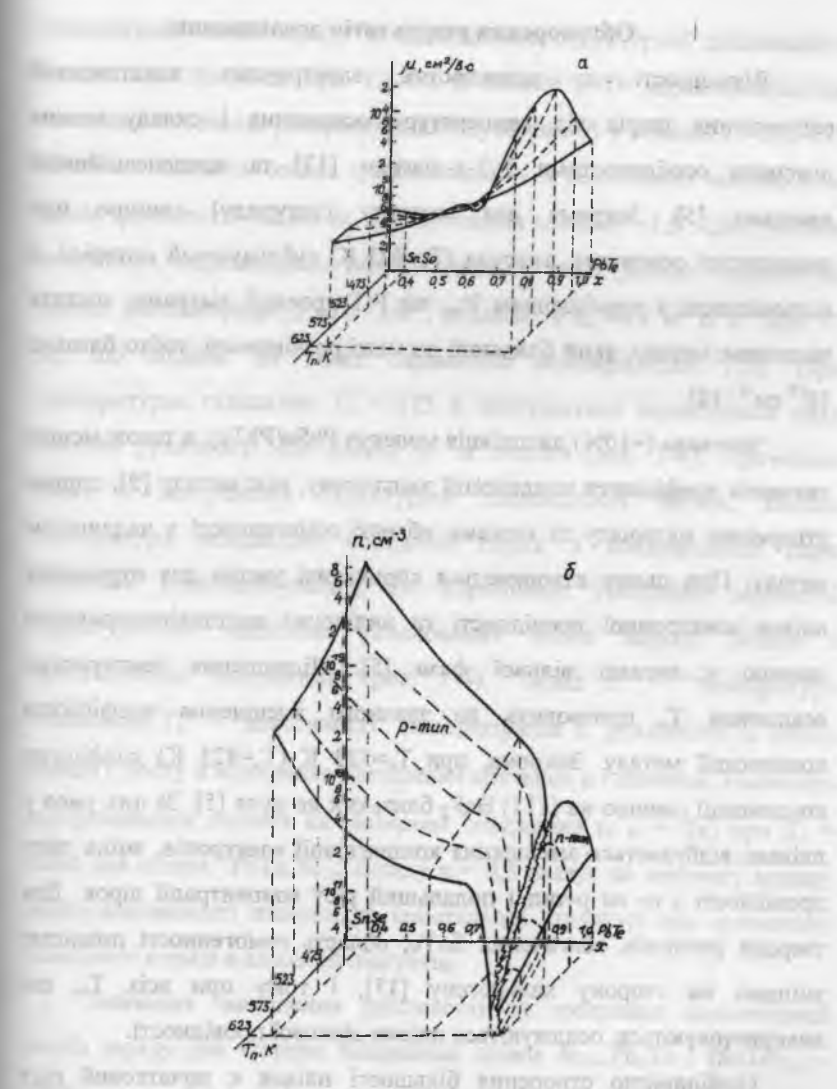


Рис.4. Просторові діаграми тонких плівок системи SnSe-PbTe .

Обговорення результатів дослідження.

Відмінності в залежностях електричних властивостей епітаксійних шарів від температури осадження і складу можна пояснити особливостями Р-Т-х-діаграм [13] та конденсаційними явищами [5]. Зокрема для селеніду (телуриду) свинцю при температурі основного джерела ($T_b=823$ К) сублімуючий матеріал, у відповідності з розміщенням P_{min} на Р-Т-проекції діаграми, містить надлишок металу, який близький до межі розчинності, тобто близько 10^{18} см⁻³ [10].

Часткова (~10%) дисоціація молекул PbSe(PbTe), а також менше значення коефіцієнта конденсації халькогену, ніж металу [5], сприяє утворенню матеріалу за межами області гомогенності з надлишком металу. При цьому створюються сприятливі умови для отримання плівок електронної провідності та виділення надстехіометричного свинцю у вигляді вільної фази [5]. Підвищення температури осадження T_n призводить до значного зменшення коефіцієнта конденсації металу. Зокрема, при $T_n=523$ К ($T_b=823$ К) коефіцієнт конденсації свинцю на (111) BaF₂ близький до нуля [5]. За цих умов у плівках відбувається зменшення концентрації електронів, зміна типу провідності з n- на р-тип і подальший ріст концентрації дірок. Для твердих розчинів, збагачених SnTe, область гомогенності повністю зміщена на сторону халькогену [13], і тому при всіх T_n , що використовуються, осаджуються плівки діркової провідності.

Особливістю створення більшості плівок є початковий ріст рухливості носіїв заряду з підвищенням температури осадження. Це зв'язано з одночасною дією двох факторів — зменшенням

концентрації носіїв заряду та підвищенням структурної досконалості конденсату. Зокрема, при $T_n < 493$ К плівки PbTe характеризуються значними кутовими розорієнтаціями субзерен. А в області $T_n=523-573$ К плівки являють собою кристал-мозаїку з величиною монокристалевих фрагментів 0,2 см та малокутовими межами ~1,5'. Цим умовам осадження відповідають високі значення електричних параметрів плівок (концентрація $n \approx 10^{17}$ см⁻³, рухливість $\mu_n \approx 4,1$ м² В⁻¹с⁻¹ при 77 К), що подібні до таких параметрів монокристалів [13]. При температурах підкладок $T_n > 573$ К відбувається характерний спад значень рухливості для плівок р- та n-типів (рис. 1-4). Причиною цього є погіршення структурної досконалості плівок. Високі температури осадження сприяють поряд з конденсацією пари процесам ревіпарування, що спричинює утворення зернистої структури та додаткове розсіювання носіїв заряду. Згідно з просторовими діаграмами (рис. 1-4), "склад х" - "температура осадження T_n " - "властивості" (концентрація n , рухливість μ носіїв заряду), росту n відповідає зменшення значення μ і навпаки. Наявність екстремальних значень на ізотермах осадження $n, \mu = f(x)$ при $T_n = \text{const}$ для плівок PbTe_xSe_{1-x} складу $x = 0,5$ вказує на перевагу впливу розпорядкованості атомної та кристалльної структур при взаємному заміщенні атомів в аніонній підгратці.

Значення зменшення рухливості та зростання концентрації носіїв заряду для ізотерм осадження плівок Sn_{1-x}Pb_xTe і (SnTe)_{1-x} - (PbSe)_x при $0,0 \leq x \leq 0,5$ пояснюють особливостями діаграм станів систем і заданого спектра носіїв заряду. Розширення області гомогенності твердого розчину та її зміщення в сторону халькогену

зумовлюють збільшення ступеня дефектності атомної структури, що й спричинює зростання концентрації дірок. Участь у явищах переносу дірок з великою ефективною масою різко зменшує рухливість носіїв заряду [13].

Висновок.

1. Одержано аналітичні рівняння, які визначають залежність електричних властивостей (концентрація носіїв заряду, їх рухливість) епітаксійних шарів твердих розчинів $\text{Sn}_{1-x}\text{Pb}_x\text{Te}$, $\text{PbTe}_x\text{Se}_{1-x}$, $(\text{PbTe})_x(\text{SnSe})_{1-x}$ та $(\text{SnTe})_{1-x}(\text{PbSe})_x$ на сколах (111) кристалів BaF_2 від технологічних параметрів у методі гарячої стінки (температура осадження $473 \text{ K} \leq T_n \leq 613 \text{ K}$, хімічний склад $0,0 \leq x \leq 1,0$).

2. Побудовано просторові діаграми, які дають можливість визначити умови вирощування технологічного матеріалу із заздалегідь заданими електричними властивостями.

Залежності електричних властивостей (μ , $\text{cm}^2/(\text{V}\cdot\text{c})$ - рухливість; n , cm^{-3} - концентрація носіїв заряду) епітаксійних шарів твердих розчинів від технологічних параметрів. Екстремальні значення параметрів і області значень факторів (T_n - температура осадження; x - хімічний склад).

Шари Склад	Рівняння	Екстремальні значення параметрів	Фактори	
			x	T_n , K
$\text{PbTe}_x\text{Se}_{1-x}$ $x \in [0,0;1,0]$	$\mu = -8,39 \cdot 10^4 + 3,19 \cdot 10^3 T_n - 8,42 \cdot 10^4 x + 2,91 \cdot 10^9 T_n^2 + 9,21 \cdot 10^4 x^2$ $n = 1,57 \cdot 10^{16} - 2,06 \cdot 10^{15} T_n + 5,15 \cdot 10^{17} x - 9,55 \cdot 10^{17} x^2$	$4,1 \cdot 10^4$ $8,9 \cdot 10^{16}$	1,0 1,0	548 556
$\text{Sn}_{1-x}\text{Pb}_x\text{Te}$ $x \in [0,0;0,8] \cup$ $\cup [0,9;1,0]$	$\mu = -1,09 \cdot 10^2 + 3,98 \cdot 10^{-1} T_n - 3,77 \cdot 10^0 x - 3,65 \cdot 10^{-4} T_n^2$ $lnn = 13,8 + 1,77 \cdot 10^2 - 4,71 \cdot 10^{-1} T_n - 1,24 \cdot 10^1 x + 4,16 \cdot 10^{-4} T_n^2 - 6,29 x^2$	$4,1 \cdot 10^4$ $8,0 \cdot 10^{16}$	1,0 0,98	548 566
$(\text{SnTe})_{1-x}(\text{PbSe})_x$ $x \in [0,0;0,8] \cup$ $\cup [0,9;1,0]$	$\mu = 1,04 \cdot 10^2 + 3,73 \cdot 10^{-1} T_n + 5,30 \cdot 10^0 x - 3,45 \cdot 10^{-4} T_n + 5,88 \cdot 10^{-1} x^2$ $lnn = 13,8 + 1,01 \cdot 10^2 - 1,95 \cdot 10^{-1} T_n - 1,20 \cdot 10^1 x + 1,68 \cdot 10^{-4} T_n^2 + 5,88 x^2$	$2,8 \cdot 10^4$ $4,2 \cdot 10^{16}$	1,0 1,0	541 580
$(\text{PbTe})_x(\text{SnSe})_{1-x}$ $x \in [0,4;1,0]$ $x \in [0,4;0,8]$ $x \in [0,85;1,0]$	$\mu = 11,527 - 2,479 \cdot 10^{-2} T_n - 8,943x - 2,857 \cdot 10^{-4} T_n x + 2,592 \cdot 10^{-5} T_n^2 + 8,016x^2$ $lgn = 37,469 - 4,781 \cdot 10^{-2} T_n - 15,52x - 3,619 \cdot 10^{-3} T_n x + 4,408 \cdot 10^1 T_n^2 + 11,6 x^2$ $lgn = 34,651 + 2,458 \cdot 10^{-2} T_n + 13,793x - 2,643 \cdot 10^{-2} x T_n$	$4,3 \cdot 10^4$ $8,07 \cdot 10^{17}$ $3,95 \cdot 10^{16}$	1,0 0,75 1,0	562 573 623

1. Сизов Ф.Ф. Твердые растворы халькогенидов свинца и олова и фотоприемники на их основе// Зарубежн. электрон.техника. – 1977. – Вып.Н. – С.31-48.
2. Бойкин Н.И., Кутолин С.А. Физико-химические свойства соединений $A^{IV} B^{VI}$, сегнетоэлектриков и основы изготовления ИК-приемников// Обзоры по электронной технике. Микроэлектроника. – 1979. – №1(615). – С.3-67.
3. Раренко И.М., Фреик Д.М. Полупроводниковые материалы и приборы инфракрасной техники. – Черновцы: ЧГУ, 1980.
4. Анатычук Л.И. Термоэлементы и термоэлектрические устройства. Справочник. – К.: Наук. думка, 1979. – 768 с.
5. Фреик Д.М. и др. Физика и технология полупроводниковых пленок. – Львов: Вища шк., 1988. – 152 с.
6. Берченко Н.Н. и др. Формирование барьеров Шоттки и гетероструктур в халькогенидах свинца и твердых растворах на их основе // Зарубежн. электрон. техника. – 1979. – Вып.4. – С.34-52.
7. Фреик Д.М. Получение плёнок соединений $A^{IV} B^{VI}$ с заданными параметрами методами квазизамкнутого объёма// Изв. АН СССР. Неорган. материалы. – 1982. – Т.18. – № 8. – С. 1237-1248.
8. Русаков А.А. Рентгенография металлов. – М: Атомиздат, 1987. – 480 с.
9. Михайлов И.Ф. и др. Методика изучения структурного совершенства монокристаллов путём анализа ушерения рентген-дифракционных кривых// Заводская лаборатория. – 1980. – Т. 46. – №1. – С. 27-31.

10. Кучис Е.В. Методы исследования эффекта Холла. – М.: Сов. Радио, 1974. – 328 с.
11. Адлер Ю.П. и др. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1971. – 282 с.
12. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1965. – 132 с.
13. Абрикосов Н.Х., Шелимова Л.Е. Полупроводниковые материалы на основе соединений $A^{IV} B^{VI}$. – М.: Наука, 1975. – 194 с.

Б.І.Яворський

ВПЛИВ ІЗОСТРУКТУРНОГО ЗАМІЩЕННЯ R-ЕЛЕМЕНТА В МОНОКРИСТАЛАХ $R_3Ga_5O_{12}$ НА СТРУКТУРУ ВАЛЕНТНОЇ СМУГИ

У роботі обговорюються результати експериментальних досліджень впливу парціальної густини електронів f- і d-симетрії лантаноїдів на структуру валентної зони і природу хімічного зв'язку в монокристалах $R_3Ga_5O_{12}$.

The results of experimental reseachus of partial-density influence of f- and d-symetry electrons of lanthainoide on the valency zone structure and the nature of chemical connection in $R_3Ga_5O_{12}$ monocrystals are described in this article.

Об'єктами дослідження були вибрані монокристали типу $R_3Ga_5O_{12}$, де R – Nd, Sm і Gd, які були паспортизовані методами рентгеноструктурного аналізу і резерфордівського зворотного розсіювання іонів гелію. Попередні дослідження показали, що всі монокристали характеризуються високим ступенем структурної досконалості.

Всі R-елементи займають додекаедричні пустоти, утворені аніонами кисню і різняться між собою на два порядкові номери, тобто із переходом до наступного елемента спостерігається збільшення заряду ядра і електронної системи на два елементарні заряди. В

ізолюваному атомі спостерігалось би подальше заповнення 4f- і 5d-електронних станів, а саме $4f^4$ і $4f^6$ у Nd і Sm відповідно, і $4f^7 5d^1$ в Gd. Очевидно, що в монокристалах гранату з іонно-ковалентним типом хімічного зв'язку, внаслідок перекриття хвильових функцій валентних електронів і дії кристалічного поля, картина суттєво зміниться. Однак, це не перешкоджає прослідкувати за впливом електронів f- і частково d-симетрії на структуру валентної смуги і енергію зв'язку в ізоструктурних галієвих монокристалах гранату при заміщенні іонів у с-катіонній підгратці.

Від досліджуваних монокристалів були отримані рентгенофотоелектронні спектри внутрішніх електронних рівнів і валентні смуги. Їх характеристики наведені у таблиці.

Стала ґратки, енергія зв'язку і деякі параметри валентної смуги в монокристалах гранату

№ п/п	Хімічний склад	Стала ґратки, нм	Ga 3d, eВ	O1s, eВ		Валентна смуга, eВ	
				E_{1s}	$\Delta E_{1/2}$	Положення високоен. краю	$\Delta E_{1/2}$
1	$Nd_3Ga_5O_{12}$	1,250	19,8	530,4	2,8	2,8	8,1
2	$Sm_3Ga_5O_{12}$	1,242	19,8	530,35	2,5	3,5	7,6
3	$Gd_3Ga_5O_{12}$	1,238	19,8	530,7	2,3	7,0	3,65
Похибка		$\pm 0,0005$			$\pm 0,05$		

Як видно із таблиці, енергія зв'язку Ga 3d-електронних станів не змінюється при заміні типу катіона в с-підгратці. Що стосується O1s-лінії, то спостерігається не тільки енергетичне зміщення, але й зміна профілю лінії, зумовлена вищезгаданим заміщенням у монокристалах гранату. Деяке збільшення енергії зв'язку O1s-електронів при

переході від $Nd_3Ga_5O_{12}$ до $Gd_3Ga_5O_{12}$ можна пояснити зменшенням віддалі між аніонами і катіонами, оскільки, як показано в роботі [1], енергія зв'язку внутрішніх електронів від'ємно заряджених атомів А у сполучі АВ залежить від середньої віддалі між ними: $E \sim 1/R_{AB}$. Дійсно, при ізоструктурному заміщенні рідкоземельних елементів, іонні радіуси зменшуються в ряді $Nd \rightarrow Sm \rightarrow Gd$, що призводить до відповідної зміни параметра ґратки гадолінієвого гранату і збільшення енергії зв'язку O1s-електронних станів у $Gd_3Ga_5O_{12}$ в порівнянні із $Nd_3Ga_5O_{12}$. Однак необхідно зауважити, що у таких складних структурах, якими є галієві гранати, зміна енергії зв'язку може бути викликана також зміною співвідношення між іонною і ковалентною складовими хімічного зв'язку [1].

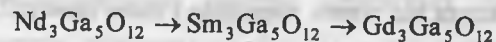
Якщо порівняти енергії O1s-рівня в оксидах гранатоутворюючих елементів, то вони становлять: $Nd_2O_3 - 529,4$ еВ; $Sm_2O_3 - 529,2$ еВ; $Gd_2O_3 - 529,3$ еВ, $Ga_2O_3 - 530,9$ еВ, що вказує на домінуючу роль зв'язків Ga-O у формуванні 1s-лінії кисню в структурі гранату.

У досліджуваних кристалах, як видно із таблиці, спостерігається збільшення ширини O1s-лінії на половині висоти на $\approx 0,3$ еВ при переході від $Nd_3Ga_5O_{12}$ до $Gd_3Ga_5O_{12}$. Таку зміну ширини внутрішнього рівня іонів кисню можна пояснити тим, що в даних кристалах проходить заповнення 4f-оболонки R-атомів, внаслідок чого змінюється величина взаємодії електронів f-симетрії з вакансією на 1s-рівні іону кисню [1,2].

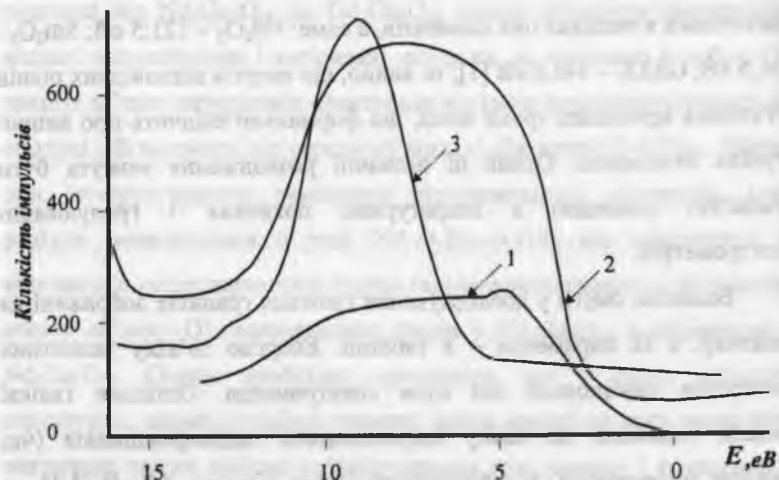
У роботі були виміряні також енергії внутрішніх 4d-рівнів рідкоземельних елементів, які у досліджуваному ряді дорівнюють відповідно 121,8; 132,6; 142,2 еВ. Якщо порівнювати їх значення

значеннями в оксидах цих елементів, а саме: $Nd_2O_3 - 121,5$ еВ; $Sm_2O_3 - 131,6$ еВ; $Gd_2O_3 - 141,6$ еВ [1], то видно, що енергія відповідних рівнів у галієвих кристалах трохи вища, що формально свідчить про вищий ступінь окислення. Однак ці незначні розходження можуть бути зумовлені різницею в апаратурних похибках і градуванні спектрометрів.

Валентні смуги у досліджуваних галієвих гранатах зображені на малюнку, а їх параметри – в таблиці. Енергію зв'язку валентних електронів вимірювали від нуля спектрометра. Оскільки галієві гранати належать до класу широкозонних напівпровідників (чи, швидше діелектриків) із забороненою зоною порядку 4,2 еВ [3,4], то рівень Фермі спектрометра знаходиться між останнім заповненим рівнем і зоною провідності. Із наведених результатів видно, що заміщення іонів R-типу зумовлює суттєву трансформацію валентної смуги галієвих кристалів. Це, зокрема, відображається не тільки в трансформації структури валентної смуги, але й в енергетичному зміщенні верху валентної зони і суттєвій зміні її ширини. З аналізу малюнку видно, при переході



спостерігається зменшення ширини валентної зони. Це свідчить про те, що в наведеному ряді ізоструктурних кристалів гранатів проходить більш суттєва делокалізація валентних електронів гранатоутворюючих елементів.



Мал. Валентні смуги в галієвих гранатах:

1 – $Nd_3Ga_5O_{12}$; 2 – $Sm_3Ga_5O_{12}$; 3 – $Gd_3Ga_5O_{12}$.

Для однозначної інтерпретації рентгенофотоелектронного спектра валентних електронів необхідно виконати відповідні розрахунки, що нами зроблено в роботі [5] для $Y_3Fe_5O_{12}$, або провести рентгенівські емісійні спектроскопічні дослідження, оскільки вони дозволяють розділити вклади від різних елементів і типів симетрії. У роботі [6] наведені результати дослідження аналогічних галідів методом рентгенівської емісійної спектроскопії, де були отримані $Ga K_{\beta_{2,5}}$, $Ga L_{\alpha}$ і $O K_{\alpha}$ - лінії і суміщені в єдиній енергетичній шкалі.

Максимум K_{β_2} - підсмуги галію збігається з високоенергетичним піком фотоелектронного спектра, тоді як максимум в районі

10-11 eV – з одним із піків $Ga L_{\alpha}$, що відповідає вкладу 4f-електронів рідкоземельного елемента [6].

Характерно, що взаємне розташування максимумів в розподілі електронної густини різних симетрій у верхній частині валентної зони залежить від заміни R-елемента в структурі гранату, що знаходить своє відображення в положенні максимуму в розподілі електронів р-симетрії галію і надтонкій структурі K_{α} -лінії кисню. Із ростом числа 4f-електронів максимум K_{β_2} -підсмуги зміщується в середню частину валентної зони, що зумовлено перекриттям хвильових f-та р-функцій рідкоземельних елементів та галію відповідно.

Оскільки при цьому положення OK_{α} -лінії залишається незмінним, то робиться висновок [6] про зменшення енергетичного перекриття хвильових функцій р-симетрії іонів кисню та галію, хоча поява тонкої структури K_{α} -лінії кисню може свідчити про гібридизацію 2p-електронних станів кисню з 4f-електронними станами R-елемента. Більш однозначно ідентифікувати особливі точки валентної смуги галієвих гранатів можуть допомогти рентгеноелектронні спектри відповідних оксидів рідкоземельних елементів, наведених у роботі [7], із якої випливає, що при збільшенні числа електронів на 4f-рівні відповідний максимум на спектрі зміщується вглиб від рівня Фермі. Аналогічна ситуація спостерігається і в галієвих гранатах при ізоструктурному заміщенні, тобто в міру заповнення 4f-рівня електронами валентна смуга звужується й зміщується вглиб відносно рівня Фермі (див. мал. і табл.). Якщо взяти до уваги також зміну параметрів $O1s$ -лінії, то очевидно, що це призводить до росту ковалентної складової хімічного

зв'язку [2] у ряді галієвих гранатів $R_3Ga_5O_{12}$, де $R - Nd \rightarrow Sm \rightarrow Gd$, тобто ковалентна складова у гадоліній-галієвому гранаті значно більша, ніж у ніодим-галієвому. Таким чином, судячи із рентгеноелектронних спектрів гранатів $R_3Ga_5O_{12}$ та оксидів Nd, Sm і Gd, а також із результатів теоретичних розрахунків [5], можна зробити висновок, що валентну смугу галієвих гранатів можна умовно розділити на три підсмуги: високоенергетичну, яка формується в основному електронами p-симетрії галію, який знаходиться в октаедричній підгратці, s-симетрії рідкоземельних металів і s-симетрії кисню; середньоенергетичну, яка формується в основному електронами p-симетрії галію, який знаходиться в тетраедричній підгратці, f-симетрії рідкоземельних металів і s-симетрії кисню; низькоенергетичну, яка формується в основному електронами d-симетрії іонів галію і p-симетрії іонів кисню. Суттєву роль у формуванні густини валентної зони відіграють процеси гібридизації 4f-електронних станів рідкоземельних металів і 2p-електронних станів кисню.

Автор висловлює вдячність професору Б.К. Остафійчуку за підтримку й корисне обговорення результатів досліджень.

1. Нефедов В.И. Рентгеноэлектронная спектроскопия химических соединений. – М.: Химия, 1984. – 255 с.

2. Карлсон Т.А. Фотоэлектронная и оже-спектроскопия. – Л.: Машиностроение, 1981. – 431 с.

3. Спектроскопическое исследование монокристаллов $Nd_3Ga_5O_{12}$. А.И.Билый, А.Е.Носенко, В.М.Лукьянец, В.И.Литвиненко // ЖПС. – 1983. – Т.14. – №5. – С.763-769.

4. Носенко А.Е. и др. Комптоновское рассеивание света в монокристаллах $Gd_3Ga_5O_{12}$ // Физ. электроника. – 1982. – Вып.24. – С.135-138.

5. Структура електронних станів монокристалів залізо-ітрієвого гранату / Авт. колектив Остафійчук Б.К., Пилипів В.М., Шелудченко Л.М., Яворський Б.І. // Вісник Івано-Франківського відділення українського фізичного товариства і Прикарпатського ун-ту. – №2. – С.51-56.

6. Shcherba I.D., Ridosh M.S., Sinyushko V.G., Pershin V.F. The peculiarities of the emission spectra of gallium garnets // Journal of Alloys and Compounds. – Vol. 179. – 1992. – P. 137-140.

7. Тетерин Ю.А., Баев А.С. Рентгеновская фотоэлектронная спектроскопия соединений лантаноидов. – М.: ЦНИИ Атоминформ, 1987. – 128 с.

М.В.Хабер, В.С.Курганський, Б.Л.Литвин, Л.Р.Олійник,
Д.А.Чеверда, М.В.Панчошак

СТАН І ПЕРСПЕКТИВИ ЗАСТОСУВАННЯ ОКСИЕТИЛЬОВАНИХ ФОСФОРОВІСНИХ МАСТИЛЬНО- ОХОЛОДЖУВАЛЬНИХ РІДИН У МЕТАЛООБРОБЦІ

У статті розглянуто основні фосфоровмісні мастильно-охолоджувальні рідини (МОР) та МОР на основі поліетиленгліколів, що використовуються в промисловості. Зроблено огляд існуючих і нових підходів, що стосуються впливу компонентів змащувально-охолоджуючих рідин на поверхню оброблюваних матеріалів і ріжучого інструменту. Показана можливість покращення властивостей ЗОР за рахунок введення нових фосфоровмісних присадок.

This article studies general groups of polyethelenglicol-based lubricant-cool liquids (LCL) and LCL which are used in industry. An overview of current and new approaches of influence units of LCL on the surface of materials and an incisor has been attempted. A possibility of improving properties of LCL in samples of new units has been shown.

Сучасний розвиток технології металообробки йде шляхом інтенсифікації процесів різання й використання високомісних,

легованих і термостійких сталей і сплавів. У цих умовах зростають вимоги до мастильно-охолоджувальних рідин (МОР).

Узагальнення вітчизняного й зарубіжного досвіду показує, що в результаті раціонального використання МОР досягається збільшення стійкості ріжучих інструментів в 1.3-5 і більше разів. Це дає можливість підвищення продуктивності праці в 1.1-2 рази, а в деяких операціях значно більше. Отже використання ефективних ЗОР є значним резервом виробництва, що сприяє покращенню якості обробки.

Високостійкі, леговані і термостійкі сталі і сплави, що володіють високими експлуатаційними якостями, належать до групи важкоперероблюваних матеріалів. Для них характерна здатність до збільшення механічної стійкості при високих температурах і низькі показники оброблюваності різанням. Це викликає підвищення зношування інструменту, задири і заїдання, що призводить до глибинних пошкоджень матеріалу.

Змащувальний ефект зовнішнього середовища полягає в тому, що в результаті взаємодії компонентів МОР з металічними поверхнями, які труться, на останніх утворюються більш чи менш складні речовини - вторинні структури, при появі яких інтенсивність безпосередньої взаємодії поверхонь, що труться, зменшується. В залежності від обставин це можуть бути: хемосорбовані й адсорбовані на металічних поверхнях атоми і молекули зовнішнього середовища; плівки хімічних сполук оброблюваного й інструментного матеріалів з компонентами середовища; шар твердих розчинів атомів середовища з кристалічною ґраткою оброблюваного й інструментного матеріалів.

Змащувальна хімічна дія МОР полягає в тому, що, в результаті взаємодії з компонентами МОР поверхонь ріжучого інструменту, стружки й поверхні різання, на них утворюються плівки хімічних сполук - оксидів, сульфідів, хлоридів, йодидів, фосфідів і т.п.

Охолоджувальні властивості МОР полягають у відводі тепла від нагрітих контактних поверхонь ріжучого інструменту і стружки. Температура різання за рахунок відводу тепла знижується, стійкість інструменту підвищується і, можливо, зростає швидкість різання. Охолоджувальні властивості емульсолів забезпечуються високою теплопровідністю води, а також високим коефіцієнтом теплопередачі через плівки емульсії.

Миюча дія МОР спрямована на забезпечення безперервної евакуації із зони обробки відходів функціонування системи різання - продуктів зношування інструменту, дрібною стружки, карбідів і т.п. Миючі властивості МОР мають вплив на якість оброблюваної поверхні.

Адсорбційний ефект зниження міцності твердих тіл (ефект Ребіндера) полягає в тому, що ПАР (поверхнево-активні речовини) МОР, проникаючи в мікротріщини або місця навантаження під різцем, адсорбуються на металічних поверхнях, знижують поверхневу енергію, сприяють пластичній деформації і руйнуванню металу. Цьому сприяє і розклинюючий тиск молекулярних шарів у мікротріщинах.

Різання як процес обробки включає: руйнування металу й утворення в результаті цього нової поверхні на деталі; інтенсивну пластичну деформацію знову утвореної деталі, яка поширюється на

деяку глибину. Всі ці явища локалізовані в робочій області. В зонах контакту утворюваної стружки й оброблюваної поверхні виробу з передньою і задніми гранями інструменту з'являються досить високі контактні напруги й важкі режими граничного тертя, які характеризуються неперервним зношуванням поверхневих шарів. У результаті постійно утворюються ділянки нових поверхонь і на інструменті.

Сучасні МОР - це складні багатокомпонентні системи. Існують різні погляди на механізм дії емульгованих МОР на поверхню металу. Найбільше поширена теорія змащувальної хімічної дії МОР. У процесі різання активні в хімічному відношенні поверхні різця і стружки вступають у хімічні реакції з компонентами МОР з утворенням захисних плівок, що екранують сили адгезії між поверхнями, що труться і зменшують зношування інструменту. В основі використання МОР лежить фізико-хімічна взаємодія їх активних компонентів з поверхнею металу. МОР повинна володіти високою проникаючою і реакційною здатністю відносно оброблюваного матеріалу.

Процеси обробки металів різанням характеризуються різноманітністю умов, широкою номенклатурою оброблюваних матеріалів, специфікою конкретних операцій, характером і масштабами виробництва. Тому МОР і методи їх застосування, високоефективні для однієї групи оброблюваних матеріалів і операцій, можуть бути малоефективними для інших оброблюваних матеріалів і операцій, а водночас перешкоджати процесу різання і стійкості ріжучого інструменту. Навіть при обробці одного і того ж

оброблюваного матеріалу в залежності від елементів режиму різання, характеру операцій і застосовуваного інструментного матеріалу, ефективність різних МОР змінюється і може бути протилежною [21]. Це зумовлює необхідність широкого асортименту МОР. Для їх ефективного застосування у промислових умовах недостатньо лише високих технологічних властивостей, мають бути забезпечені необхідні експлуатаційні властивості, такі як легкість приготування в умовах підприємств-споживачів, стабільність, відсутність кородуючої дії на деталі, що виготовляються, і обладнання, консервація оброблених деталей на міжопераційний період, відсутність розчиняючої дії на зафарбоване покриття станка, бактеріологічна стійкість, морозостійкість, задовільні санітарно-гігієнічні властивості, простота знешкодження й екологічна безпека.

Найбільш поширеними групами МОР, які використовуються в промисловості, є: масляні рідини, водні емульсії мінеральних масел і синтетичні. В окремих випадках в якості МОР використовують також консистентні мастила або пасти з графітом, дисульфідом молібдену чи іншими наповнювачами [22].

Масляні МОР складаються з мінерального масла, що є базовим, до якого можуть бути додані антифрикційні, протизносні й антизадири присадки, інгібітори корозії, антиоксиданти, антипінні й антигуманні присадки. Мінеральне масло в масляних МОР займає 76-95%. Це високоочищені нафтові або парафінові масла з в'язкістю 3-40сСт при 50°C й індексом в'язкості не менше 60. Антифрикційні присадки - це технічні рослинні олії і жири (ріпакова олія, жирні кислоти рослинних масел та їх ефіри, а також полімерні ненасичені

жирні кислоти). Антизносні присадки зменшують зношування ріжучого інструменту при зростанні навантаження. З них у складі масляних МОР відомі диалкілфосфіти $(RO)_2POH$, (R-алкіл C_3-C_{18}). В якості протизносної присадки для МОР використовують продукти реакції сполучення формули $RX(R1X)P(S)Sh$, де R і R1-вуглеводневий замісник C(5-30); X-O або S; і сполуки формули $H(CH_2CH_2O)_xR_2(CH_2CH_2O)_yH$, де R_2 -вуглеводневий замісник $C_{(8-22)}$ [9]. Антизадири присадки зменшують зношування ріжучого інструменту при найбільших температурних і механічних навантаженнях. Це найчастіше речовини, що містять S, CL, P. В якості інгібіторів корозії найчастіше використовують полімерні ненасичені жирні кислоти, амінофосфати, диалкілдитіофосфати. Антипінні присадки використовують для запобігання піноутворення (диметилсиліконові полімери, ефіри алкенілантарної кислоти і етиленгліколів). В [1] показано суттєвий вплив складу технічного триетаноламіну на властивості концентратів і робочих розчинів ряду синтетичних і напівсинтетичних ЗОР технологічних середовищ. Дано рекомендації по якості триетаноламіну, що використовується у складі досліджених мастильно-охолоджувальних технологічних середовищ (МОТС).

Антигуманні присадки знижують утворення й виділення масляного туману (аерозолу). Це поліолефіни (співполімер поліетилену й поліпропілену). Ці присадки вводяться в кількості 0.5-3%.

Водні емульсії мінеральних масел готують на місці застосування з емульсолів, до складу яких входять мінеральні масла, емульгатори,

речовини-зв'язки, інгібітори корозії, бактерициди, антипінні присадки, а також антизносні й антизадири присадки. Вміст мінерального масла складає 70-85%, решта - емульгатори разом з іншими добавками. Рідина містить (%): емульсол на основі мінерального масла, ефір талового масла й триетаноламіна, талового масла і гідроксиду калію 2,5-3,5; 25%-ну водну дисперсію співполімеру вінілхлориду з вінілацетатом 0,1-0,5; продукт конденсації моноетаноламіна з диметилolkарбамідом 0,1-0,3; натрієві солі алкілбензолсульфокислот 0,025-0,075, решта - вода [7]. Емульгатори - ПАР, крім зменшення поверхневого натягу й стабілізації диспергованих краплин, виконують роль змащувальних речовин та інгібіторів корозії. Також використовують аніоноактивні й неіоногенні ПАР, їх суміші (калієві, натрієві чи триетаноламінові мила нафтових, жирних, смоляних і сульфокислот; оксиетильовані алкілфеноли, жирні спирти, ефіри жирних кислот, моно- і диетаноламіни жирних кислот). Речовини-зв'язки призначені для забезпечення сумісності базового мінерального масла з емульгаторами. Це спирти (ізопропанол, циклогексанол), гліколі типу диетиленгліколю, гексиленгліколю; ефіри гліколів (монобутиловий ефір етиленгіколю). В якості інгібіторів корозії, крім емульгаторів, додатково використовують алканоламіни (моно-, ди-, триетаноламін, ізопропаноламіни), продукти їх взаємодії з жирними кислотами та ін.

Синтетичні МОР бувають двох типів: водні розчини олігомерів і ПАР (1-10%) і водні розчини інгібіторів корозії типу неорганічних солей (1-2%). В [2] наведено результати експериментальних досліджень і промислових випробувань у процесах різки й

поверхневої пластичності. Деформування нових водорозчинних МОР з різним процентним складом полімерної складової. Встановлено залежність %-ного вмісту полімерної складової МОР від величини її молекулярної маси. Показано вплив концентрації полімерної складової на товщину змащувального шару при різних швидкостях ковзання, а також її вплив на величину осьових остаточних напруг. Визначено оптимальну концентрацію полімерної складової МОР для випадку використання комбінованої обробки різкою і поверхневим пластичним деформуванням при обробці низьколегованих вуглеводистих і нержавіючих сталей. Показана ефективність досліджуваних складів МОР в порівнянні із сучасними емульсіями Е2В, ЕГТ 5%-ної концентрації. За універсальністю, тривалістю зберігання, експлуатаційними властивостями синтетичні МОР переважають емульсії. До їх складу входять водорозчинні низькомолекулярні полімери чи ПАР, інгібітори корозії, бактерициди, антипінні присадки, антизносні і антизадири присадки і вода. Вміст суми компонентів у концентраті - 50-70%, решта - вода. В [6] описано спосіб одержання водорозчинної МОР для обробки металів з антикорозійними властивостями, що не утворює твердого осаду, забруднюючого інструмент. МОР являють собою композицію 5-50% алканоламіну, розчинного у воді, 1-30% органічної кислоти і 0,5-25% поліоксисалкиленгліколя. В якості алканоламіна використовують моно-, ди- і триетаноламіни. Кислота, що входить у композицію, має формулу $\text{CH}=\text{CH}-\text{CH}_2-\text{CH}(\text{COOH})-\text{CH}(\text{COOR})-\text{CH}_2$, де R-циклогексильна або бензильна група. Поліоксисалкиленові спирти одержують сополімеризацією суміші етилену й оксиду пропілену. До

складу композиції також входять інші компоненти, а серед них – інгібітори росту бактерій (хлоровані крезолі, альдегіди, сполуки ртуті та ін).

Результати досліджень, що проводились галузевою лабораторією механо-хімічної обробки металів Львівського політехнічного інституту, дозволили вперше використовувати в якості присадки до ЗОР високомолекулярні сполуки - полімери, і на їх основі створити високоєфективні полімеровмісні МОР. Полімери, що входять до складу МОР, адсорбуючись на метали під дією високої температури й механічних напруг, піддаються механічній й термічній деструкції. При цьому утворюються високоактивні "уламки" макромолекул з високою хімічною активністю, що здатні хімічно взаємодіяти з оброблюваним металом, знижуючи рівень вільної поверхневої енергії, полегшуючи процеси його деформації і руйнування.

Водорозчинні низькомолекулярні полімери і ПАР є основою концентрату, що використовується для приготування синтетичних МОР. Це найчастіше поліалкіленгліколі - лінійні полімери окису етилену й окису пропілену, а також продукти поліконденсації окису етилену і пропілену зі сполуками, що мають активний атом водню (спирти, гліколі, аміни, кислоти). Це зумовлено тим, що оксиалкільовані продукти володіють достатньою змащувальною здатністю, низькими піноутворенням і емульгуючою здатністю, хімічною і фізичною стабільністю, стійкістю до солей твердості, порівняною нешкідливістю - властивостями, необхідними для синтетичних МОР [23].

При обробці важкооброблюваних матеріалів та проведенні операцій, де виділяється значна кількість тепла, найбільш ефективні хімічні мастильні плівки, утворювані на контактуючих металічних поверхнях елементовмісними сполуками, в тому числі й Р-вмісними, які вводяться до складу композиції МОР в якості протизношувальної і протизадірної присадки.

До числа перспективних Р-вмісних присадок відносять органічні сполуки фосфорної кислоти типу $(RO)_2P(O)OH$, в якості компонентів МОР можливе застосування неорганічних фосфатів, водорозчинного поліфосфатного скла, продуктів конденсації алканоламінних миль синтетичних жирних кислот і фосфатів Na, складних фосфорних ефірів поліоксиетильованого гексанолу, поліфосфату амонію, поліфосфатів різного складу. Розглянуті шляхи синтезу продуктів на основі фосфорної кислоти і деяких інших органічних речовин (полімерного й неполімерного характеру) з метою одержання сполук із поверхнево-активними, емульгуючими, мастильними і т.п. властивостями, дозволяють використовувати їх у композиціях МОР[19]. Ефіри фосфорної кислоти мають високу змащувальну здатність і високі антикорозійні властивості. В режимі граничного змащування, коли мастильні властивості визначаються, значною мірою, хімічним складом, а не в'язкістю, фосфорні сполуки працюють за принципом "хімічного полірувального ефекту"; локальні хімічні реакції, внаслідок тертя, протікають між присадкою і металом, утворюються сполуки внаслідок чого відбувається перерозподіл навантаження пластичної деформації. Завдяки дуже високій змішуваності ефіри фосфорної кислоти можуть зміщатися з

присадками практично всіх типів, а також із синтетичними й природними маслами, хоча характеризуються несумісністю з каучуками, лаком, пластмасами.

Механізм протизадірної дії фосфорорганічних сполук ґрунтується на утворенні фосфідів металів на поверхнях, що труться, при високих температурах. Взаємодія між металом і фосфорорганічними сполуками при різних температурах експериментально підтверджена з допомогою радіоактивного ізотопу ^{32}P . Припускають, що плівка з фосфиду металу має високий опір до зсуву. Але фосфіди металів можуть утворювати з металом і евтектичні суміші, які у вигляді розплаву розмащуються по поверхні завдяки їх низьким температурам плавлення під дією високого питомого тиску, створюваного в локальних мікронах фрикційної взаємодії, і вирівнювати поверхню. Це ефект так званої "поліруючої" дії фосфорорганічних протизадірних присадок. Встановлено також присутність металічних солей фосфорної кислоти та її неповних ефірів.

Результати досліджень на шестеренному стенді FZG показують, що трикрезилфосфат за ефективністю поступається трибутилфосфату. Ефективність трикрезилфосфата може бути підвищена введенням невеликих кількостей олеїнової кислоти. Поряд з кислотними і нейтральними алкіл- і арилфосфатами, наприклад трифенілфосфатом, триолеїлфосфатом та ін., серед яких алкілфосфати кращі за арилфосфати за ефективністю, в якості протизадірних присадок рекомендовані діалкілфосфати, бутилфосфонат, ефіри дифосфорної кислоти і триалкілфосфіни; деякі з них характеризуються високою

термічною стабільністю. Серед триарилфосфатів феніл- і крезилпохідні займають значне місце; о-крезол через його токсичність випадає з цього списку. Серед аліфатичних ефірів фосфорної кислоти найбільш ефективними є сполуки з 4-6 атомами вуглецю, а також похідні оксидів поліетилену і поліпропілену. Фізичні властивості ефірів фосфорної кислоти значною мірою залежать від природи гідроксидного компонента. Вони можуть змінюватися від ідеально плінних рідин до високоплавких твердих речовин, у залежності від типу ефіра, симетричності структури й молекулярної маси. Властивості триалкілфосфатів змінюються по мірі зміни молекулярної маси від водорозчинних до водонерозчинних рідин чи легкоплавких твердих речовин. Для складних ефірів фосфорної кислоти спостерігається відома закономірність: пониження симетричності молекули (розгалуження алкільного ядра) спричинює підвищення в'язкості й температури застигання і негативно впливає на в'язкісно-температурні характеристики. У відповідності з цією закономірністю, триалкілфосфати з прямим довгим ланцюгом мають більш високі температури застигання, ніж їх ізомери з розгалуженим ланцюгом. Низькотемпературна в'язкість триалкілфосфатів керується тією ж закономірністю. В [14] наведені результати вивчення великої групи водорозчинних полімерних фосфатів в якості компонентів МОР. Встановлено характер залежності технологічних властивостей МОР від середнього ступеня полімеризації і хімічного складу фосфату, а також можливість організації промислового виробництва поліфосфатної складової МОР на типовому хімічному обладнанні.

Гідролітична стабільність залежить від їх структури і молекулярної маси і може змінюватися в широких межах, від низької до високої. Чим довший ланцюг, тим вища гідролітична здатність. Ефіри фосфорної кислоти більш стійкі до гідролізу, як ефіри силікатів чи боратів, але вони поступаються ефірам карбонових кислот за цим показником. Але для використання ефірів фосфорної кислоти в якості змащувальних масел їх гідролітична стабільність достатня для практичних завдань.

За токсичністю ефіри фосфорної кислоти різноманітні; залежно від хімічної структури вони можуть являти собою як нешкідливі, так і високотоксичні речовини. Тому необхідно визначати токсичність кожного ефіра індивідуально [20].

Одним із перспективних компонентів МОР є полімерні сполуки. Полімери, сополімери чи сполуки на основі етилену, пропілену, циклопентадієну мають підвищену стійкість до окиснення та дії хімічних реагентів, здатні зміцнювати змащувальну розподіляючу плівку між валками прокатного стану й оброблюваним металом.

При використанні поліетиленовмісних сполук в якості компонентів МОР велике значення має їх змішуваність із водою. Легкість видалення масел промивкою водою й високі змащувальні властивості дозволяють забезпечувати одержання таких характеристик, яких іншими способами досягнути важко.

Для гарячої прокатки Al і його сплавів рекомендована напівсинтетична МОР у складі якої – фосфатєфіри і солі фосфорних кислот на основі поліетиленгліколей чи продукти реакції поліоксиетиленгліколя зі спиртом [23]. Рідина, яку можна

використовувати в гідравлічних системах і в процесах обробки металів, містить 60-99% води або суміші води з присадкою, яка знижує температуру замерзання і 1-40% концентрату, що включає 1-диалкілдітіофосфат формули $(RO)_2P(S)-SH$, де R-алкіл, алкеніл, арил, арелкіл, алкаріл C_{1-24} (краще 2-етилгексил); 0,2-3 сполуки-джерела молібдат-іону(ДМІ); 0,5-10 неіоногенного полієфірного ПАР; 0,01-20 асоційованого полієфірного загущувача (АПЗ). В якості ДМІ використовують молібдати Na, K, NH_4 , MoO_3 . ПАР - продукт окису етилену і суміші спиртів C_{10-15} , середня молекулярна маса – 300-5000. АПЗ отримують взаємодією оксиду α -олефіну з продуктом реакції триметилпропану і суміші 3-10 частин оксиду етилену і 1 частини оксиду пропілену. Молекулярна маса АПЗ 5000-40000, частка ланок окису α -олефіну в АПЗ 1-10%, в прикладі в якості оксиду α -олефіну використовують оксид α -олефінів C_{15-18} [17]. В [5] запропоновано композицію, яка може бути використана як МОР для процесів обробки металів або як робоча рідина гідравлічних механізмів, яка містить нафтові чи синтетичні масла і/або тверді парафіни, тверді жири чи рослинні олії, які знаходяться у вигляді емульсії або розчинені в полігідроксісполуках (поліетиленгліколь, гліцерин, сахароза та ін.), або в їх водних розчинах у присутності білків або ПАР. В якості ПАР можуть бути взяті, наприклад, алкілбензолсульфонат, алкіламін поліетиленгліколя або алкілфеніловий ефір поліетиленгліколя. Композиція стабільна (навіть у випадку сильнорозбавлених емульсій). Вона може бути приготовлена у вигляді рідини, пасти чи гелю й використовуватися як

МОР для металоріжучих і шліфувальних станків, прокатних станів чи як гальмівна рідина.

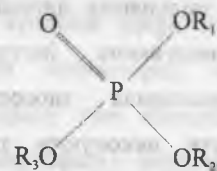
МОР, які містять поліетиленгліколі (ПЕГ) володіють змащуючою, змиваючою й охолоджуючою дією, а також доброю розчинністю у воді. Такі МОР зменшують тертя, рівень шуму і температуру ріжучого інструмента, збільшують тривалість роботи ріжучого інструмента і підвищують якість обробки поверхні, використовуються для кінцевої обробки кремнієвих виробів, оскільки добре змиваються при промивці[8].

ПАР поліоксietiленового типу широко використовуються в якості компонентів МОР. Роботи по дослідженню поліоксietiльованих спиртів, в основному, присвячені визначенню розмірів і форми агрегатів ПАР у різних середовищах. Встановлено, що при зміні полярності й структури молекул розчинника (зміна довжини і ступеня розгалуження алкільних радикалів, наявності конденсованих ароматичних циклів) змінюється місце переважної локалізації молекул розчинника за довжиною ланцюга ПАР. Характер взаємодії молекул оксietiльованого спирту зумовлює можливість утворення агрегатів в циклогексані, гептані, тоді як в ароматичних розчинниках ПАР присутній у вигляді мономерів чи димерів, внаслідок сильної взаємодії із середовищем [3].

Існують дані з вивчення впливу концентрації і молекулярної маси полімерної складової на змащувальні й технологічні властивості полімеровмісних МОР. Наведено результати експериментальних досліджень і промислових випробувань у процесах різки й поверхневого пластичного деформування нових водорозчинних МОР

з різним процентним складом полімерної складової. Встановлено залежність %-ного вмісту полімерної складової МОР від величини її молекулярної маси. Показано вплив концентрації полімерної складової на товщину змащувального шару при різних швидкостях ковзання, а також її вплив на величину осьових остаточних напруг. Визначено оптимальну концентрацію полімерної складової МОР для випадку використання комбінованої обробки різкою і поверхневим пластичним деформуванням при обробці низьколегованих вуглеводистих і нержавіючих сталей, сучасних емульсій Е2В, ЕГТ 5%-ної концентрації [2].

Для прокатки кольорових металів, таких як А1, використовується водно-мастильна охолоджувальна рідина, яка містить складний фосфорний ефір. МОР відрізняється тим, що має спрощений склад і складається в основному з води. МОР включає 0,1-25% органічних ефірів фосфорної кислоти. Фосфорний ефір формули



де R_1 —поліоксietiльований нормальний спирт C_6 , R_2, R_3 — радикали з C_{10-20} атомами С.

Вивчались хімічно активні присадки на основі органічних фосфорних ефірів (ФЕ) для прокатки алюмінієвої фольги. Методом РЕС досліджено взаємодію хімічно-активних присадок на основі комплексу монодифосфорних ефірів (ФЕ; 2:1, відповідно) ф-ли $[RO(CH_2CH_2O)_n]_2P(O)(OH)_{2-a}$ (R—гідрофобний радикал: n-гексил, нонілфенол, 9-октадецил, ізо-тридецил) із поверхнею алюмінію.

Ступінь етоксіюкислення ФЕ від 40 до 70% практично не впливає на протизносні властивості присадки. Нейтралізація МОР триетаноламіном і збільшення рН призводить до погіршення якості поверхні, що обробляється. Показано, що водна МОР на основі комплексу ФЕ при оптимальному співвідношенні вказаних параметрів володіє більш високими змащувальним і протизносними властивостями, ніж нафтові змазки [18]. Розроблено змащувально-охолоджувальні технологічні засоби на водній основі, що утворюють зносостійкі захисні покриття з азот- і фосфоровмісними сполуками. Генерування із середовища РВ-6, РВ-7 захисних покриттів може бути альтернативою нанесенню захисних покриттів, оскільки при цьому відбувається фізична й хімічна взаємодія компонентів міцел (азот- і фосфоровмісних сполук) із працюючими поверхнями. Будучи проміжним прошарком між оброблюючою поверхнею й інструментом, дані покриття стабілізують величину наросту на ріжучому інструменті до оптимальних значень, звільняють адгезійне схоплення в зоні контакту, знижують зношування інструменту, обладнання. Виконавши функції підвищення зносостійкості обладнання, інструменту, дані покриття виконують також роль захисних антикорозійних покриттів [10]. МОР для прокатки - це масла й емульсії, які сильно впливають на процес виробництва та якість продукції, особливо при роботі сучасних прокатних станів. При гарячій прокатці алюмінію використовують емульсії типу "масло у воді", при холодному прокаті алюмінію в якості основи для МОР використовують високоочищені керосинові фракції. В якості протизадирної присадки використовують ефіри фосфорної кислоти.

Для оцінки масел використовують різні критерії: налипання металу на валки, коефіцієнт тертя і ковзання. Головна мета використання емульсій - забезпечити ефективне охолодження, максимальне відтискання в силу зниження коефіцієнта тертя, низькі витрати енергії і високу якість поверхні прокату.

У даний час МОР без присадок для прокатки (на основі мінеральних масел) часто заміняють емульгованими МОР з метою пониження швидкості прокатки й водночас збереження високої якості прокату, попередження небезпеки пожежі і зниження виносу МОР в атмосферу цеху. Емульсії на основі мінеральних масел без присадок не досягають рівня емульсій на основі пальмоядрового масла зі властивостями, хоча їх змащувальну здатність можна поліпшити додаванням жирних кислот або їх ефірів, які підвищують несучу здатність. Тому емульговані МОР для прокатки містять крім базового масла, аніоноактивні чи неіонні емульгатори (5 - 10%), активні компоненти (жирні кислоти, ефіри жирних кислот чи аліфатичні спирти) й розчини промоторів, чим забезпечується висока стабільність концентрату при зберіганні. Протизадирні присадки (триалкіл- і триарилфосфати) понижують тертя між розкатом і валками, тому метал не налипає на валки і забезпечується висока якість поверхні прокату. Концентрат містить також антикорозійні добавки (алканоламід, сульфонати) і деколи - бактерициди. Розроблено емульсійну МОР на основі жирних гудронів і триетаноламіну, одержаних при дистиляції жирних кислот, що входять до складу рослинних масел і технічного жиру. Визначено область стабільності одержаної МОР залежно від таких факторів, як

хімічний склад гудронів, співвідношення гудрона, мінерального масла і триетаноламіну, вмісту NaOH і концентрації емульсії. Показано, що в умовах лиття під тиском вказана МОР забезпечує комплекс експлуатаційних МОР [11].

Водні розчини синтетичних МОР, які деколи використовують у прокаті, містять у більшості випадків водорозчинні активні компоненти (ефіри фосфорної кислоти з більш як 45% оксиду етилену, поліалкиленгліколи) й амідні похідні в якості антикорозійних присадок. Для попередження забруднення маслами, як правило, такі розчини не містять емульгаторів. Ці МОР характеризуються більш високим коефіцієнтом тертя, створюваним у міжвалковому отворі, ніж МОР без присадок і емульсії, тому їх використовують у тих випадках, коли за умовами прокатки потрібно більш високе тертя між розкатом і валками. В [4] показано значення довговічності МОР для економіки технологічних процесів обробки металів різанням. Розглянуто умови, що забезпечують підвищення довговічності МОР і збереження їх технологічних властивостей.

1. Влияние состава технического триэтанолamina на качество синтетических и полусинтетических СОТС / Стулий А.А., Шаповал Б.С., Никитина Н.С. Герасимова Н.Н., Трапова Г.И. // Нефтепереработка и нефтехимия. – К., 1989. – №37. – С. 54-56.

2. Проскуряков Ю.Г., Исаев В.И. Влияние концентрации и молекулярной массы полимерной составляющей на технологические свойства полимерсодержащих СОЖ. // Трение и износ. – 1980. – 1, №5. – С. 891-897.

3. Немировская Л.В. и др. Исследования взаимодействий между молекулами в смеси полиоксиэтилированных спиртов с неводными средами методом ЯМР-Н1 і С13 // Химия и применение неводных растворов: Тез. докл.1 Всесоюз. конф. 11-13 ноября 1986. – Т.1. – Иваново, 1986. – С. 121.

4. Oszczednlodzaco-smarujacych / Stepniak Stanislaw // Gosp. mater. – 1992. – 44. – №9. – С. 163-164.

5. МОР для обробки металів. Сиракава Йоити; Асахіденка коге к.к. Заявка 58-63793, Японія. Заяв. 12.10.81, N56-162158, опубл. 15.04.83. МКИ С 10 М 1/06; С 10 М 1/22.

6. Piotrovsci Alfred B., Davis Robert H. Metal vorcing lubricantcontaining an alkanolamine and a cycloalifatic acid [Mobil Oil Corp.] . Пат.США , кл. 252/34.7, (С 10 М 3/16; С 10 М 3/04), NN 4259206, заяв., 22.08.79, NN 68793, опубл. 31.03.81.

7. Смазочно-охлаждающая жидкость для механической обработки металлов: Пат. 203514 Россия, МКИ6 С 10 М 13 /02 Тарасова А.И., Харитоновна Л.С., Долгов В.Н., Бирбраер Л.Н.; АО откp. № 9300636/04; Заявл. 3.2.93; Опубл. 19.6.95, Бюл. №1.

8. Накамура Хіроміті, Цудзісато Ясуо, Масакі Сігеру, Кікума Рйодзо, Такахасі Кацухіко, Араї Сігеру; Міцубісі Кіндзоку к.к. Заявка 57-21495, Японія. Заяв. 11.07.80, N55-94893 , опубл. 04.02.82. МКИ С 10 М 3/16; С 09 М 3/14.

9. Lubrikant composition conteining dialkyklithiophosphorik acid neutralized with alkoxylated МКИ5 С 10 М 137/08/ Kammann Karl P.,Garrrrett William R.; Ferro Corp. . - N498554; Заявл. 26.3.90; Опубл. 14.1.92; НКИ 252/32.7R.

10. Шульга Г.И., Чистяков А.В. Смазочные материалы на водной основе, которые образуют износостойкие защитные покрытия. Поверхн. шар, точ. и эксплуатационные свойства деталей машин: Тез докл. семин., Москва, 25 июня, 1990. – С. 20.

11. Получение и свойства эмульсированных СОЖ на основе жировых гудронов и триэтаноламина / Постолюк Ю.М. Соболева Т. П., Вакулова О. М., Тюльменков А. В., Осадчук Є. С. // Исследование в области химии и технол. продуктов переработки горючих ископаемых. – Л., 1986. – С. 99-104.

12. Кулиев А.М. Химия и технология присадок к маслам и топливам. – М.: Химия, 1972. – 235 с.

13. Полимер-содержащие смазочно-охлаждающие жидкости. Библиотека передового опыта. – Л.: Каменяр, 1986. – 87 с.

14. Сравнительная оценка полифосфатов различного состава в качестве компонентов СОЖ. (Фишбеин О.Ю., Полянская Т.С., Абрамова Л.И., Исина А.С., Серазетдинов Д.З. Изд АН КазССР. Сер хим.-1989.- N3-С.7. -Рос., рез каз.

15. Ahlgrin Michael, Mietens Gerhard, Dany Franz-Josef, Kandler-Joachim. Additiv fur die Metallbearbeitung. [Hoechst AG]. Заявка ФРН, кл. С 10 М 1/10, С 10 М 3/02, NN 2850244, заявл. 20.11.78, опубл. 29.05.80.

16. Синицин В.В. Подбор и применение пластических смазок. М.: Химия, 1974. – 188 с.

17. Пат. 4797229 США, МКИ В 01Д 17/04, С10М 125/22 Frentrup Mark A., Gibson Joseph R., Garson...BASF Corp. - N678963; Заяв.06.12.84; опубл.10.01.89; НКИ 252/345.

18. Reactive additives improve aqueous aluminum foil roiling/Riddle B.L., Kirk T.E., Kipp E. M. // Lubric. eng. – 1991. – Vol. 47, №1. – С. 41-45.

19. Пути синтеза и свойства продуктов на основе фосфорной кислоты и некоторых неорганических веществ / Рахимова М.А., Д.З.; и-т хим. наук АН КазССР. Алма-Ата, 1988. – 8 с. – Библиограф., 17 назв. – Рукопись Деп в ВИНТИ 24.07.87, №5346-B87.

20. Кламманн Д. Смазки и родственные продукты. – М.: Химия, 1998. – 150 с.

21. Заславский Ю.С. Трибология смазочных материалов. – М.: Химия, 1991. – 191 с.

22. Малиновский Г.Т. Масляные смазочно-охлаждающие жидкости для обработки металлов резанием. – М.: Химия, 1993. – 98 с.

23. Смазка при горячей прокатке алюминия и его сплавов. Под ред. В.Г.Казакова. – М.: Химия, 1986. – 145 с.

С.Д.Максим'юк, Д.Я.Ставична, О.В.Шийчук.

ВПЛИВ ПРОЦЕСУ ФОТОСТАРІННЯ НА КОНЦЕНТРАЦІЮ РОЗРИВІВ І ЗШИВОК У ПОЛІСТИРОЛІ

Знайдено концентрації розривів та зшивок для різних серій зразків полістиролу, опроміненого ультрафіолетовими променями. Проведено детальний аналіз отриманих результатів з урахуванням багатьох чинників.

This study has defined a concentration of ruptures and crosslinks for a variety of polystyrene samples exposed to ultraviolet rays.

Вступ.

Поглинання полістиролу в ультрафіолетовій області зумовлене електронними переходами в бензольному кільці. Інші групи полістиролу не поглинають світло в області довжин хвиль більше 200 нм. При зустрічі двох полімерних радикалів може відбуватися зшивання ланцюгів, поряд з цим, можливим є розрив ланцюга за реакцією диспропорціонування, а при утворенні кінцевого радикалу може проходити деполімеризація. Опромінення полістиролу у вакуумі призводить до пожовтіння зразка (інтенсивність забарвлення залежить від тривалості опромінення), що є результатом утворення спряжених подвійних зв'язків та інших структур.

Встановлено, що фотооксидаційні процеси локалізуються близько поверхні полімерного зразка, як з освітленого, так і з тіньового боку. Причиною такого явища є, очевидно, повільна дифузія кисню в товщу полімерного зразка. Фотодеструкція полімерів визначається будовою основного ланцюга і природою замісників. Під час дії ультрафіолетових променів полістирол окислюється з утворенням карбонільних і гідроксильних груп, при цьому виділяються бензол, метилкетон, диметилбензол, етиловий спирт, а також формальдегід, мурашина й оцтова кислоти та інші кисневмісні продукти. Первинна стадія процесу являє собою поглинання квантів світла бензольними кільцями з утворенням збудженого синглетного стану, що переходить у триплетний та інші, дисоціює по вуглець-водневих або вуглець-вуглецевих зв'язках. При пониженні температури зразка та зі збільшенням інтенсивності світла відбувається утворення проміжного продукту. При подальшому опроміненні продукт розкладається. Утворення проміжного продукту і його розклад є складними процесами, кінетика яких не відповідає рівнянням моно- або бімолекулярних реакцій. Результатом дії світла на видозмінену структуру макромолекули полістиролу є утворення радикалів. Дія ультрафіолетових променів на зразок, у якому були утворені пероксидні радикали, призводить до зміни молекулярної маси полістиролу. Витримка опроміненого зразка в темному місці при кімнатній температурі призводить до зменшення концентрації радикалів. Наступне опромінення зразка відновлює початкове значення концентрації радикалів.

Різні дослідження механізму фотоокислення полістиролу доводять утворення карбонільних і гідроксильних груп. Характер продуктів фотоокислення свідчить про найбільш ймовірне приєднання атома кисню до третинного вуглецевого атома з утворенням гідропероксиду, розпад якого призводить до утворення карбонільних і гідроксильних груп.

Реакції вільних радикалів з утворенням малоактивних або неактивних продуктів зумовлюють обрив ланцюга фотоокислення. Виділення летких продуктів (водню, оксиду і діоксиду вуглецю, води, метану, бензолу, стиролу, бензилового спирту і бензофенону, метилетилкетону, формальдегіду, мурашиної і оцтової кислот) відбувається при тривалому опроміненні полістиролу. Поряд із цим в опромінену полістиролі утворюються низькомолекулярні продукти фотоокислення, які через низьку рухливість залишаються в об'ємі полімеру.

Методика експериментів.

Полістирольні зразки мали форму прямокутних пластинок розміром 190*12,7*3 мм. Після витримки у камері штучної погоди зразки були підготовлені для гель-проникної хроматографії шляхом зрізання тонких шарів мікрорізцем і високошвидкісного подрібнення. Пластинки зразка були опромінені УФ-променями з довжиною хвилі менше 320 нм (крайній тропічний рівень), джерелом яких були флуоресцентні лампи (Q-Panel UVA-340). Опромінення проводилось при сталій кімнатній температурі $30^{\circ}\text{C} \pm 0,5^{\circ}\text{C}$.

Аналізи молекулярно-масового розподілу проб із використанням стандартних систем проводився в спеціалізованій лабораторії (Polymer Supply and Characterization Centre at Rapra Technology Ltd., Shrewsbury, UK). У всіх випадках було використано дві колонки довжиною 300 мм виробництва Polymer Laboratories, які містять сорбент Mixed gel-B з частинками розміром 10 мікрон. В якості розчинника було використано тетрагідрофуран при швидкості потоку 1мл/хв, температура аналізу кімнатна. Розчинник містив антиоксидант для запобігання деструкції полімеру під час аналізу. Результати аналізу представлено у формі відносної концентрації залежно від часу утримування у колонці. Концентрації були виміряні при 500 рівних відрізках часу, починаючи з 5 хв після ін'єкції в колону, час закінчення коливався в межах від 15 до 25 хв після ін'єкції, залежно від характеристик досліджуваного матеріалу.

Метою даної роботи була обробка отриманих за допомогою гель-хроматографа даних досліджених зразків полістиролу. Гель-хроматограми були переведені в табличну форму, а отримані молекулярно-масові розподіли призвели до нормованого вигляду в середовищі електронних таблиць Excel-97 за допомогою формули:

$$w_i = I_i / \sum I_i,$$

де w_i – нормована масова частка i -тої фракції полімеру, I_i – інтенсивність сигналу детектора під час утримування, який відповідає i -тій фракції полімеру, $\sum I_i$ – сума сигналів детектора за всіма фракціями хроматограми.

Моделювання проводили за допомогою спеціально створеної програми polisim6, яка моделює кількість зшивок і розривів при

деструкції полімеру. Результатом програми є число, яке характеризує суму квадратів різниць між модельними й експериментальними даними ММР. Моделювання проводять при різних значеннях індексів зшивання і деструкції, порівнюючи результати за сумою різницевих квадратів. Підбором параметрів деградації було знайдено умови моделювання, які спричинюють молекулярно-масовий розподіл, максимально наближений до експериментального, а отримані дані перетворено в реальні концентрації зшивок і розривів за допомогою формул:

$$C_{\text{розр}} = DI_0 \cdot \text{гер} \cdot 1000 / M_{\text{по}}$$

$$C_{\text{зшив}} = CI_0 \cdot \text{гер} \cdot 1000 / M_{\text{по}},$$

де $C_{\text{розр}}$ і $C_{\text{зшив}}$ – відповідно концентрації розривів і зшивок макромолекул (ммоль/кг), DI_0 і CI_0 – індекси зшивання і деструкції в елементарному акті моделювання, гер – число повторів елементарного акту моделювання, $M_{\text{по}}$ – середньочислова молекулярна маса початкового зразка (кг/моль). Отримані результати дають можливість охарактеризувати концентрації розривів і зшивок макромолекул полістиролу залежно від глибини зразка.

Обговорення результатів.

Під впливом опромінення відбуваються значні зміни молекулярно-масового розподілу полістиролу, про що можна судити з рисунка 1. Крива ММР деградованого матеріалу суттєво зміщена в сторону низьких молекулярних мас, що свідчить про наявність інтенсивної деструкції макромолекул. З іншого боку,

високомолекулярний хвіст молекулярно-масового розподілу теж дещо зріс, що вказує на перебіг реакції зшивання макромолекул. Таким чином, дані рис. 1 свідчать, що при опроміненні полістиролу УФ-променями одночасно відбуваються процеси деструкції і зшивання макромолекул. З характеру зображених кривих можна зробити висновок, що концентрація розривів переважає концентрацію зшивок макромолекул. Такий висновок підтверджується результатами моделювання ($C_{\text{розр}} = 6,54$ ммоль/кг, $C_{\text{зшив}} = 1,44$ ммоль/кг).

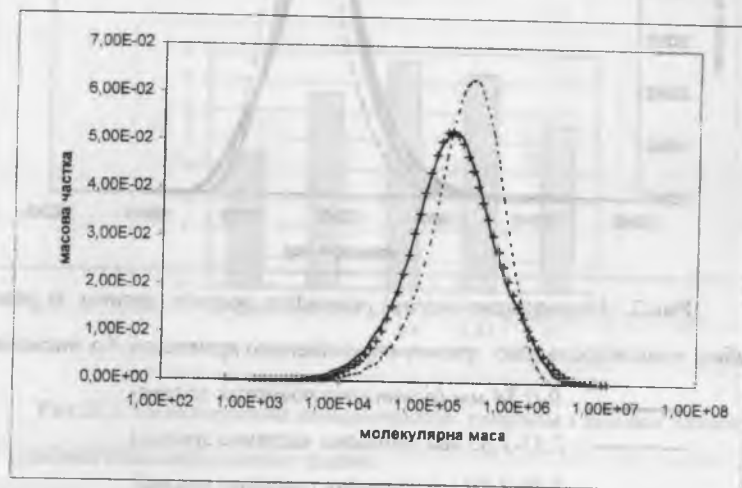


Рис. 1. Молекулярно-масові розподіли двох зразків полістиролу: початкового (пунктирна лінія) і зразка, опроміненого протягом 4-х тижнів (суцільна лінія). Символами зображено ММР, змодельований програмою.

ГПХ аналізи опромінених полістирольних пластин дають молекулярно-масові розподіли зразків, взятих із різних глибин (рис. 2). На рис. 2 спостерігається картина загального зсуву молекулярно-

масового розподілу в бік низьких молекулярних мас, а також помітне зростання високомолекулярного хвоста. Причому ступінь зміщення залежить від глибини: на лицьовій поверхні та з тіньові сторони зміни великі, а в середині зразка - малі.

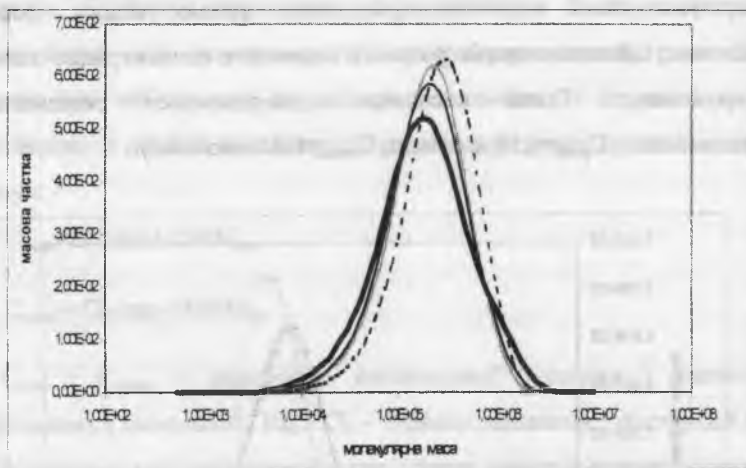


Рис.2. Молекулярно-масові розподіли зразків, взятих із різних глибин полістирольного зразка, опроміненого протягом 4-х тижнів.

- 0-0.34 мм (освітлена поверхня зразка)
- 1.51-1.83 мм (тіньова частина зразка)
- 2.78-3.20 мм (середня сторона зразка)
- вихідний полімер

Результатами програмного моделювання можна охарактеризувати концентрації розривів і зшивок макромолекул полістиролу залежно від глибини зразка (рис. 3). З рис. 3 видно, що відношення розривів до зшивок є найбільшим у внутрішній частині полімерного зразка і зменшується ближче до його поверхні як з освітленого, так і з тіньового боку. Очевидно, на співвідношення концентрацій розривів і

зшивок впливає не стільки інтенсивність опромінення, скільки концентрація кисню у полімерній речовині.

На рис. 4 зображено концентрації розривів і зшивок макромолекул у шарах на різній глибині полімерної пластинки. Деградація макромолекул найбільше проходить з освітленого і тіньового боку зразка, а у внутрішній частині інтенсивність деструкції зменшується, очевидно, внаслідок сповільнення дифузії кисню.

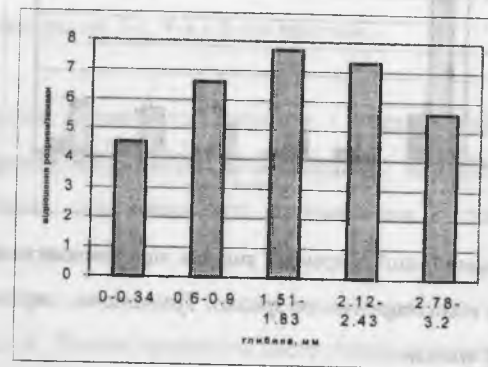


Рис.3. Співвідношення концентрацій розривів і зшивок залежно від глибини полістирольного зразка.

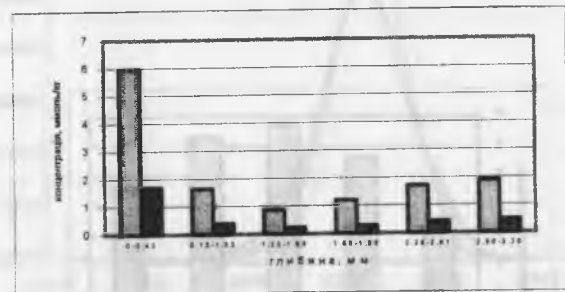
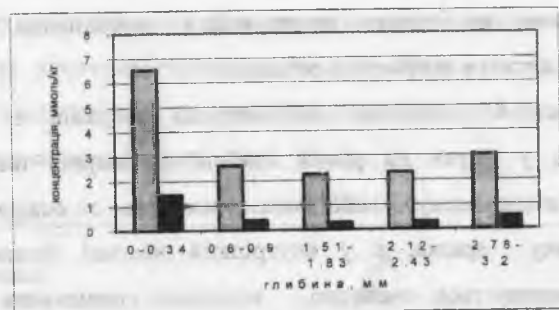


Рис.4. Концентрації розривів і зшивок макромолекул залежно від глибини шару полістирольного зразка. Тривалість опромінення: а – 4 тижні, б – 6 тижнів.

Виходячи з отриманих в результаті аналізу даних, можна також судити про залежність концентрації розривів і зшивок від часу опромінення. Рис. 5 показує залежність концентрації розривів і зшивок отриманих вимірювань для різних серій полістирольних зразків, опромінених ультрафіолетом протягом 2-х, 4-х і 6-ти тижнів. Як видно з рисунка, це прямолінійна залежність, яка показує, що швидкість оксидатії має постійне значення.

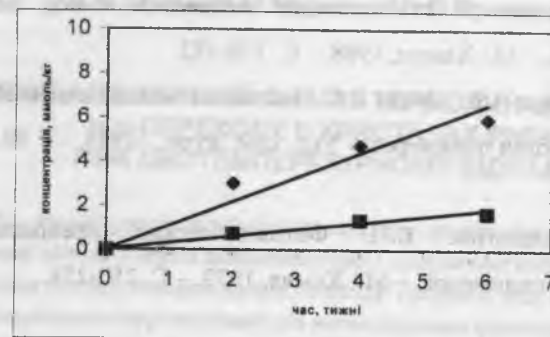


Рис. 5. Залежність концентрації розривів і зшивок від часу опромінення протягом 2-х, 4-х і 6-ти тижнів.

Визначення концентрації розривів і концентрації зшивок дає багато інформації про деталі фотооксидатії. Кількість розривів і зшивок залежить від тривалості опромінення і глибини шару полістирольного зразка.

1. Грасси А. Химия процессов деструкции полимеров. – М.: ИЛ, 1959. – С. 140-142.
2. Энциклопедия полимеров. – М.: Сов. энциклопедия, 1977. – С.231-235.
3. Кириллова Э.И., Шульгина Э.С. Старение и стабилизация термопластов. – Л.: Химия, 1988. – С. 75-80.
4. O'Donnell B., White J.R., Holding S.R. Molecular weight measurement in wheatered polymers // J. Appl. Polym. Sci. –1994.-V.52.-P. 1607-1618.
5. Ренби В., Рабек Я. Фотодеструкция, фотоокисление, фотостабилизация полимеров. – М.: Мир, 1978. – С. 421-430.

6. Старение и стабилизация полимеров / под ред. А.С. Кузьминского. – М.: Химия, 1968. – С. 170-183.

7. Шийчук А.В., Луцяк В.С. Численна модель изменения ММР в ходе деструкции полимеров // Укр. хим. журн. –1993. –Т. 59. – №2. – С. 216 – 220.

8. Шляпинтох В.Н. Фотохимические превращения и стабилизация полимеров. – М.: Химия, 1979. – С. 250-258.

Д.М.Фреїк, В.М.Кланічка, В.В.Прокопів, О.В.Козич,
Л.Р.Павлюк

КРИСТАЛОХІМІЧНИЙ АНАЛІЗ ТЕРМОДИНАМІЧНОГО n-p-ПЕРЕХОДУ В КРИСТАЛАХ PbSe ПРИ ДВОТЕМПЕРАТУРНОМУ ВІДПАЛІ

На основі кристалохімічного аналізу кристалів PbSe, що мали термічний відпал у парах халькогену (Se₂), одержано аналітичні вирази для залежності концентрації носіїв струму та температури термодинамічного n-p-переходу від технологічних факторів. Побудовані фазові діаграми рівноваги, визначені умови формування матеріалу n- і p-типу провідності із заданою концентрацією носіїв струму.

The received analytical expressions based on the crystallochemical analysis of the PbSe crystals describe a dependence of charge carrier concentration and temperature of thermodynamic n-p-transition on technologic factors. The conditions of formation of the material n- and p-type conductivity have been determined with the concentration of charge carriers, that was set in advance.

I. Вступ

Халькогеніди свинцю вже здавна привертають увагу значними перспективами практичного використання. Перш за все, вони є ефективними термоелектричними матеріалами для середньої області температур (~700 K) [1]. Їх також використовують для створення активних елементів у різних приладових структурах, що функціонують в інфрачервоному діапазоні оптичного спектра [2]. Зауважимо, що ступінь практичного використання матеріалу значною мірою визначається можливостями його одержання із наперед заданими властивостями.

Відомо [3-6], що халькогеніди свинцю, в тому числі і PbSe, мають значну область гомогенності, яка може бути зміщена як на боці металу, так і на боці халькогену. Так, зокрема, для температур 1073-1173 K існування сполуки PbSe знаходиться в інтервалі 49,8-50,05 ат.% Se [5]. Змінюючи величину і характер нестехіометричності, можна задавати як тип провідності, так і значення концентрації носіїв заряду. Авторами [3-6] встановлено, що надстехіометричні атоми Pb розміщуються в

основному в міжвузлях (Pb_p) і спричиняються до електронної провідності. Надстехіометричні атоми селену відповідальні за утворення вакансій у підгратці металу (V_{Pb}) і обумовлюють діркову провідність. Одним із методів керування нестехіометричністю є відпал кристалу PbSe в парі селену чи свинцю. У роботах [7-9] проведено детальне фізико-хімічне дослідження кристалів PbSe і визначено значення констант рівноваги квазіхімічних реакцій утворення дефектів. Пізніше ці константи були уточнені [5,10]. Але так і не було знайдено загального аналітичного виразу, який би описував залежність концентрації дефектів і, відповідно, носіїв електричного струму від умов відпалу в усій області їх зміни. Поза увагою дослідників залишився також аналіз умов, при яких відбувається термодинамічний p-n-перехід у кристалах PbSe. У даній роботі на основі кристалохімічних підходів одержано аналітичні вирази, що добре описують експериментальні залежності концентрації носіїв струму та температури термодинамічного p-n-переходу при відпалі PbSe у парах халькогену. Встановлено умови формування кристалів селеніду свинцю із заздалегідь заданими електричними параметрами.

II. Експеримент

Вихідний селенід свинцю синтезували сплавленням свинцю (С-000) і селену (В-5) у вакуумованих кварцових ампулах [9]. Термічний відпал синтезованих кристалів у парах селену чи свинцю проводився за методикою двотемпературного відпалу (рис.1). В один кінець кварцової ампули поміщали розплавлені селен чи свинець, а в інший – кристали PbSe. Після попереднього прогріву у вакуумі при 423-473 К і заповнення спектрально-чистим аргоном (до $6,6 \cdot 10^3 + 1,3 \cdot 10^4$ Па)

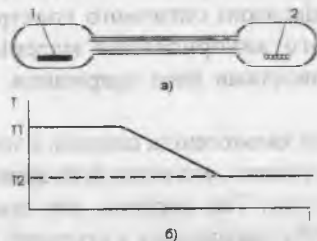


Рис. 1. Схема двотемпературного відпалу (а) і профіль температури (б): 1 - кристали PbSe; 2 - компоненти Se (Pb).

ампулу запаювали і поміщали у двозонну пічку. Парціальні тиски парів компонентів (Pb, Se) задавалися температурою T_2 їх нагріву (рис.1). Температуру T_1 відпалу кристалів PbSe задавали другою зоною (рис.1). Вона складала 900-1270 К. Час відпалу становив 8-16 год. Після відпалу ампули із зразками швидко загартовували у крижаній воді. Концентрацію носіїв струму в таких зразках визначали на основі холлівських вимірювань при 300 К.

Експериментальні результати залежності концентрації носіїв струму у відпалених кристалах PbSe від парціального тиску при різних температурах відпалу зображено на рис. 2 [7]. Видно, що в області низьких парціальних тисків пари халькогену $P_{Se} = 0 + 10^{-2}$ Па кристали

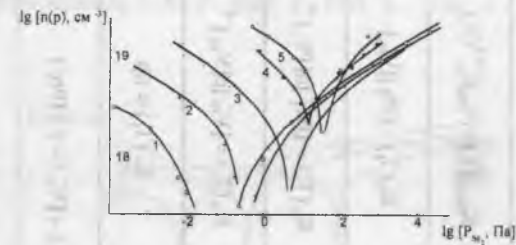


Рис. 2. Експериментальні ізотерми концентрації носіїв струму кристалів PbSe від тиску селену. Температура відпалів T, K : 1 - 900; 2 - 990; 3 - 1100; 4 - 1210; 5 - 1270; [7].

володіють n-типом провідності. Підвищення парціального тиску пари селену спричинює конверсію типу провідності з n- на p-тип (термодинамічний p-n-перехід) і подальше зростання концентрації дірок (рис. 2, праві вітки кривих). Зауважимо, що значення парціального тиску пари селену, при якому відбувається термодинамічний p-n-перехід, суттєво залежить від температури відпалу (рис. 2). При цьому характерна така закономірність: підвищення температури відпалу зумовлює збільшення парціального тиску пари халькогену, при якому настає конверсія типу провідності (рис.2).

Квазіхімічні реакції та константи рівноваги $K = K_0 \exp(-\Delta H / kT)$ при відпалі кристалів PbSe

№ п/п	Рівняння	Константи	K_0 см ³ , Па [5]	ΔH , еВ [5]
I	$\frac{1}{2} \text{Se}_2^V \leftrightarrow \text{Se}_{\text{Se}} + V_{\text{Pb}}$	$K_{\text{Se}_2, V}(T) = [V_{\text{Pb}}] P_{\text{Se}_2}^{-1/2}(T)$	$4,05 \cdot 10^{18}$	0,21
II	$\text{Pb}_{\text{Pb}} \leftrightarrow \text{Pb}_i + V_{\text{Pb}}$	$K_F(T) = [\text{Pb}_i] [V_{\text{Pb}}]$	$6,71 \cdot 10^{43}$	2,11
III	$\text{Pb}_i \leftrightarrow \text{Pb}_i^+ + e^-$	$K_a(T) = [\text{Pb}_i^+] [\text{Pb}_i]^{-1}$	$2,12 \cdot 10^{20}$	0,14
IV	$V_{\text{Pb}} \leftrightarrow V_{\text{Pb}}^+ + h^+$	$K_b(T) = [V_{\text{Pb}}^+] [V_{\text{Pb}}]^{-1}$	$2,12 \cdot 10^{20}$	0,14
V	$0 \leftrightarrow e^- + h^+$	$K_i(T) = np$	$1,13 \cdot 10^{48}$	0,59
VI		$n + [V_{\text{Pb}}^-] = p + [\text{Pb}_i^+]$		

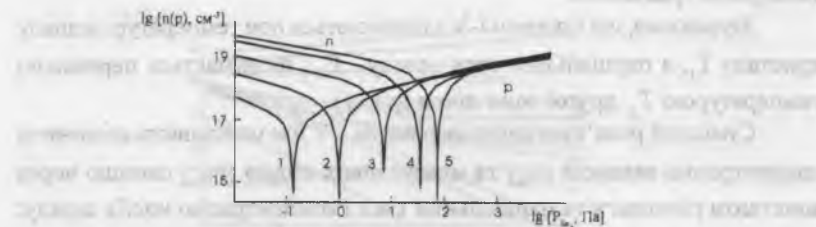


Рис. 3. Розраховані згідно з (3), (4) залежності концентрації носіїв струму кристалів PbSe від парціального тиску пари селену P_{Se_2} . Температура відпалу T , К: 1 - 900; 2 - 990; 3 - 1100; 4 - 1210; 5 - 1270.

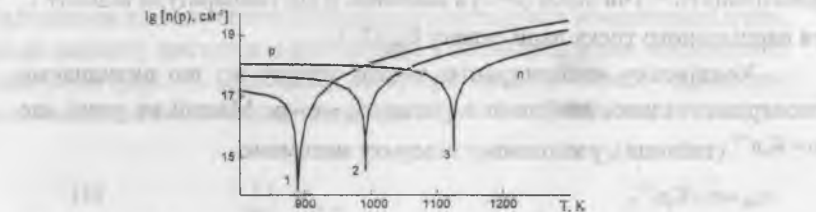


Рис. 4. Розраховані згідно з (4) залежності концентрації носіїв струму кристалів PbSe від температури відпалу T . Парціальний тиск селену, Па: 1 - 0,1; 2 - 1; 3 - 10.

III. Кристалохімічний аналіз

Рівноважний стан власних атомних дефектів кристалів PbSe при їх термодинамічному відпалі у парі селену чи свинцю можна описати системою кристалохімічних рівнянь (див. табл.). Тут: S - тверда фаза; V - пара; Pb_{Pb} , Se_{Se} - атоми у вузлі; Pb_i , Se_i - міжвузлові атоми; V_{Pb} - вакансії; e^- - електрони, h^+ - дірки; +, - - знак заряду.

У запропонованій моделі реакція I - перехід селену з пари в кристал; реакція II - утворення пари Френкеля у металевій підградці; реакції III і IV - іонізація міжвузлових атомів свинцю та вакансії свинцю

відповідно; реакція V - виникнення власної провідності та VI - рівняння електронейтральності.

Зауважимо, що процеси I-V здійснюються при температурі відпалу кристалу T_1 , а парціальний тиск селену P_{Se_2} визначається переважно температурою T_2 другої зони пічки (рис.1).

Сумісний розв'язок системи рівнянь I-V дає можливість визначити концентрацію вакансій $[V_{Pb}^-]$ та міжвузлових атомів $[Pb_i^+]$ свинцю через константи рівноваги та парціальний тиск і концентрацію носіїв заряду:

$$[V_{Pb}^-] = K_v K_{Se_2} \sqrt{P_{Se_2}} K_i^{-1} n \quad (1)$$

$$[Pb_i^+] = K_v K_i n^{-1} K_{Se_2}^{-1} \sqrt{P_{Se_2}} \quad (2)$$

З врахуванням умови електронейтральності VI, одержимо, що:

$$n^2 = [K_i + K_v K_i K_{Se_2}^{-1} \sqrt{P_{Se_2}}] [1 + K_v K_{Se_2} \sqrt{P_{Se_2}} K_i^{-1}]^{-1} \quad (3)$$

Останнє рівняння дає можливість визначити концентрацію електронів ($n > 0$) чи дірок ($n < 0$) в залежності від температури відпалу T_1 та парціального тиску пари селену $P_{Se_2}(T_2)$.

Холлівську концентрацію носіїв струму n_H , що визначаємо експериментально, знайдемо з умови $n_H = n - p$. Маючи на увазі, що $p = K_i n^{-1}$ (таблиця), у кінцевому підсумку матимемо

$$n_H = n - K_i n^{-1} \quad (4)$$

Температуру T^* термодинамічного n-p-переходу легко знайти за умови, що $n = p$. Тоді, згідно з квазіхімічними рівняннями (таблиця), маємо:

$$T^* = (2 \cdot \Delta H_{Se_2} - \Delta H_F) / (k \cdot \ln((K_{Se_2}^0)^2 \cdot P_{Se_2} / K_i^0)) \quad (5)$$

IV. Обговорення результатів

При відпалі змінюються як вид, так і концентрація дефектів у кристалах PbSe (рис. 3-5). Так, зокрема, результати теоретичного аналізу вказують на те, що збільшення парціального тиску селену (рис. 3), як і зниження температури відпалу (рис. 4), зумовлюють топологічно ідентичні зміни. Для випадку збільшення парціального тиску селену спостерігається зменшення концентрації електронів, конверсія провідності з n- на p-тип (термодинамічний n-p-перехід) і подальше

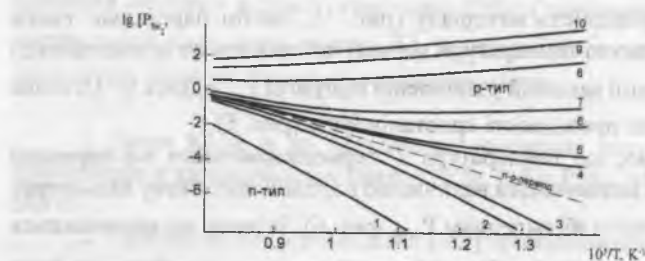


Рис. 5. Розраховані згідно з (4) температурні залежності парціального тиску селену для PbSe (P-T-діаграма). Концентрація носіїв струму $n(p)$, : 1- 10^{19} (n); 2- 10^{18} (n); 3- $5 \cdot 10^{17}$ (n); 4- $5 \cdot 10^{16}$ (p); 5- 10^{17} (p); 6- $5 \cdot 10^{17}$ (p); 7- 10^{18} (p); 8- $5 \cdot 10^{18}$ (p); 9- 10^{19} (p); 10- $1,5 \cdot 10^{19}$ (p).

зростання концентрації дірок (рис. 3). А у випадку підвищення температури відпалу спочатку відбувається спадання концентрації дірок, аж до моменту настання n-p-переходу, а потім зростання концентрації електронів (рис. 4). При цьому якщо при значних тисках характерне насичення для зміни концентрації дірок (рис. 3 – праві вітки кривих), то

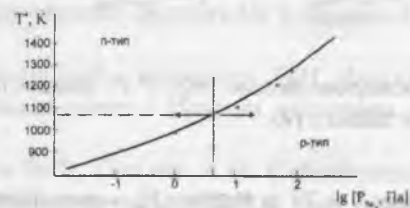


Рис. 6. Залежність температури термодинамічного n-p-переходу в кристалах PbSe від парціального тиску пари селену. o - експеримент [7]; - - розрахунок згідно з (5).

при високих температурах - для зміни концентрації електронів (рис. 4 – праві вітки кривих). Враховуючи зарядовий стан власних точкових дефектів (таб.), можна стверджувати, що малі парціальні тиски халькогену чи високі температури відпалу сприяють утворенню (генеруванню) переважаючих дефектів, пов'язаних із міжвузловими

атомами свинцю Pb^+ і вільними електронами e^- . Це й зумовлює електронну провідність матеріалу (рис. 5). Значні парціальні тиски халькогену та високі температури відпалу призводять до інтенсифікації процесів генерації вакансій у металевій підґратці V_{Pb}^- і дірок h^+ . Останнє й визначає р-тип провідності кристалів PbSe (рис. 5).

Зауважимо, що температура T^* термодинамічного n-p-переходу кристалів PbSe визначається величиною парціального тиску халькогену P_{Se_2} . Вона зростає із збільшенням P_{Se_2} (рис. 6). За умов, що визначаються координатами кривої $T^* = T^*(P_{Se_2})$ (рис. 6), генеруються в однакових концентраціях як міжвузлові атоми свинцю $[Pb^+]$, так і вакансії свинцю

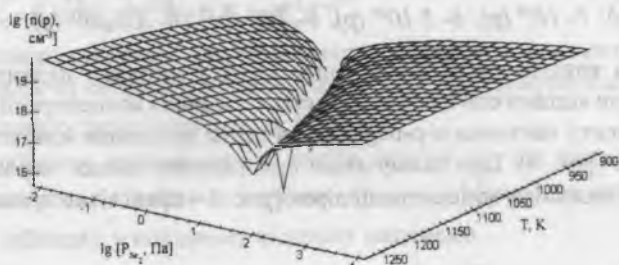


Рис. 7. Просторова фазова $n(p)$ - P - T -фазова діаграма рівноваги PbSe. Розрахунок згідно з (4).

$[V_{Pb}^-]$. При значеннях $T < T^*$ за заданих $P_{Se_2}^0 = \text{const}$ переважає генерування вакансій свинцю V_{Pb}^- і формування матеріалу р-типу, а при $T > T^*$ - міжвузлових атомів свинцю Pb^+ і матеріалу n-типу (рис. 6). Топологічно аналогічні зміни характерні й при зміні парціального тиску P_{Se_2} за сталої температури відпалу ($T = \text{const}$) (рис. 6).

Нарешті необхідно відзначити, що виведені аналітичні вирази для концентрації носіїв струму [3] та температури T^* термодинамічного n-p-переходу [5], а також побудовані на їх основі двовимірні (рис. 3-6) та просторові (рис. 7) діаграми добре якісно та кількісно пояснюють експериментальні результати (рис. 2, 6).

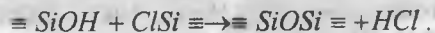
Одержані теоретичні вирази визначають значення технологічних факторів процесу відпалу кристалів PbSe (температуру відпалу T , парціальний тиск пари селену P_{Se_2}), що забезпечують формування заздалегідь заданих їх електричних параметрів.

1. Равич Ю.М. и др. Методы исследования полупроводников в применении к халькогенидам свинца PbTe, PbSe, PbS.- М.: Наука, 1968.- 383 с.
2. Раренко И.М., Фреїк Д.М. Полупроводниковые материалы и приборы инфракрасной техники.- Черновцы: ЧДУ, 1980.- 98 с.
3. Абрикосов Н.Х., Шалимова Л.Е. Полупроводниковые материалы на основе соединений $A^{IV}B^{VI}$.- М.: Наука, 1975.- 196 с.
4. Абрикосов Н.Х. и др. Полупроводниковые халькогениды и сплавы на их основе.- М.: Наука, 1967.- 219 с.
5. Зломанов В.П., Новоселова А.В. Р-Т-х-диаграммы состояния системы металл-халькоген.- М.: Наука, 1987.- 207 с.
6. Заячук Д.Н., Шендеровський В.А. Власні дефекти та електронні процеси в $A^{IV}B^{VI}$ // Укр. фіз. журн.- 1991.- Т.36.- №11.- С.1692-1713.
7. Зломанов В.П. и др. Физико-химическое исследование селенида свинца // Вестник МГУ. Химия.- 1967.- №5.- С.81-89.
8. Зломанов В.П. и др. Определение константы равновесий дефектов в селениде свинца // Вестник МГУ. Химия.- 1968.- №6.- С.67-71.
9. Новоселова А.В., Зломанов В.П. Физико-химическое исследование селенида свинца // Неорган. материалы.- 1967.- Т.3. №8.- С.1323-1329.
10. Зломанов В.П., Гаськов А.М. Собственные и примесные дефекты в соединениях группы $A^{IV}B^{VI}$ // Рост полупроводниковых кристаллов и плёнок: новые методики, критерии функциональной пригодности материалов.- Новосибирск: 1984.- С.116-133.

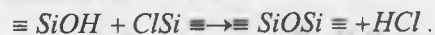
І.Ф.Миронюк

ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ СТРУКТУРИ КРЕМНЕЗЕМІВ, ОДЕРЖУВАНИХ ГІДРОЛІЗОМ ТЕТРАХЛОРИДУ КРЕМНІЮ

Розглянуто особливості хімічних перетворень і формування структури кремнеземів, одержуваних за допомогою гідролізу тетрахлориду кремнію за умов рідкофазних і пірогенного синтезів. Показано, що важливим чинником структуроутворення, окрім реакції конденсації силанольних груп, утворюваних при гідролізі зв'язків Si-Cl, є конденсаційні перетворення



Chemical transformation and the formation of silica structure obtained by silicon tetrachloride hydrolysis under pyrogenic and liquidphase syntheses have been discussed in this study. It is shown that the factor for structure formation apart from the Si-Cl groups condensation in the process is



Серед вихідних речовин, які використовуються при одержанні високочистих кремнеземів, особливе місце посідає тетрахлорид кремнію. На базі цієї сполуки, що широко застосовується у виробництві елементарного кремнію та кремнієорганічних сполук, можливі різні варіанти технологічної реалізації синтезу дисперсного діоксиду кремнію (від рідкофазного і полум'яного гідролізу SiCl₄ до

його окислення в низькотемпературній кисневій плазмі). Хоча в основі гідролітичних методів одержання кремнезему лежать одні й ті ж сумарні процеси перетворення сполук типу Si_kO_lCl_m(OH)_n, порівняльний аналіз особливостей формування структури кремнеземів, одержуваних за допомогою рідкофазного та пірогенного синтезів, у науковій літературі відсутній, що й спонукало до написання даної роботи.

Розглянемо спочатку хімічні перетворення в системі SiCl₄ – H₂O, що відбуваються за умов рідкофазного синтезу. За сучасними уявленнями, формування конденсованих кремнеземних структур визначається перебігом процесів первинного утворення ортокремнієвої кислоти, її гомогенної поліконденсації, поступового переходу конденсаційних реакцій в гетерогенну область із виникненням численних зародків твердої фази, наступного зростання та агрегації ультрамікрочастинок кремнезему [1,2]. Вважається, що зазначена сукупність процесів зумовлює закономірності структуроутворення незалежно від типу гідролітично нестійких сполук кремнію (розчинних силікатів лужних металів, ефірів ортокремнієвої кислоти, тетрахлориду кремнію). Слід, однак, відзначити певну специфіку синтезу SiO₂ через гідроліз SiCl₄, оскільки в цьому випадку формування силосанових структур відбувається за умов неперервного зростання кислотності реакційного середовища, котра, як відомо, істотно впливає на характер і кінетику конденсаційних перетворень та агрегацію мікроглобул кремнезему [1]. За даними [3], ще однією особливістю системи SiCl₄-H₂O, в

порівнянні з підкисленими розчинами силікатів, є більша різноманітність каналів утворення силікоксанових зв'язків SiOSi .

Різні аспекти рідкофазного гідролізу тетраклориду кремнію неодноразово розглядалися в науковій літературі (див. огляд [1]), але переважно за умов регулювання кислотності середовища. Хімічні перетворення SiCl_4 в сильно розбавлених розчинах вивчалися ще Р.Вільштетером і співавтором [4]. За їхніми уявленнями, зазначені перетворення полягали в повному дехлоруванні тетраклориду кремнію та подальшій поліконденсації утвореної ортокремнієвої кислоти. Аналогічні схеми генерації олігомерних гідроксильованих силікоксанових структур, конденсаційних процесів за їхньою участю, аж до формування мікрочастинок твердої фази, і понині розглядаються як основний шлях структуроутворення при рідкофазному одержанні SiO_2 з розбавлених розчинів у широкому інтервалі значень рН [1]. Характерною особливістю таких розчинів при сталих значеннях рН є існування певного індукційного періоду, за час якого аналітично не реєструється відчутна зміна концентрації ортокремнієвої кислоти (мономеру) [2]. Експериментально встановлено, що тривалість цього періоду антибатна зміні концентрації мономеру, тоді як постіндукційна швидкість реакції його поліконденсації зростає із вмістом Si(OH)_4 , значенням рН і температурою [1,2]. Оскільки при мольному співвідношенні реагентів ($m = [\text{SiCl}_4]/[\text{H}_2\text{O}]$), далекому від стехіометричного значення $m=0,5^1$, зростання кислотності середовища порівняно незначне², можна

¹ Мольне співвідношення $m=0,5$ відповідає стехіометрії реакції $\text{SiCl}_4 + 2\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{SiO}_2 + 4\text{HCl}$.

² Надлишок води має бути дуже високим (принаймні $m \ll 0,001$), бо навіть при $m=0,001$ кислотність реакційного середовища відповідатиме $\text{pH} < 1$.

вважати, що зазначені закономірності гідролітичних процесів, виявлені за умов відсутності відчутних коливань рН середовища, справедливі і у випадку гідролізу SiCl_4 в сильно розведених розчинах.

При збільшенні концентрації SiCl_4 (якщо спеціально не запобігати зниженню рН) умови гідролізу й подальших перетворень проміжних продуктів цього процесу зазнають дедалі відчутніших змін за рахунок інтенсивного підкислення розчину утворюваним хлороводнем, а також швидкого зростання густоти реакційного середовища (при $m=0,01$ [1]). Гідролітичні перетворення в системі $\text{SiCl}_4\text{-H}_2\text{O}$ за умов зростаючого дефіциту води (при надстехіометричних концентраціях тетраклориду кремнію) дослідив свого часу К.А.Андріанов (див. огляд [5]). Привертає до себе увагу висока реакційна здатність хлорсилільних груп SiCl_4 та хлоровмісних продуктів його гідролізу, за участю яких хімічні перетворення ефективно відбуваються навіть в умовах замерзання реакційного середовища (при зливанні охолодженого SiCl_4 і водноефірного розчину суміш негайно перетворилася на кригу). Згідно із запропонованою К.А.Андріановим загальною схемою гідролізу тетраклориду кремнію, конденсація утворюваних силанольних груп спостерігається вже на початкових стадіях цього процесу одночасно з дехлоруванням проміжних хлоровмісних продуктів. Внаслідок перебігу сукупності гідролітично-конденсаційних реакцій утворюються лінійні та розгалужені полісиліоксани складу $(\text{SiO}_2)_x$. На думку автора [5], до зазначеної сукупності належать лише реакції гідролізу зв'язків Si-Cl та конденсації груп Si-OH . Разом із тим, зростаючий дефіцит води, необхідність безпосереднього контакту

реакційноздатних фрагментів мономерних та олігомерних структур за умов їх обмеженої рухливості у твердій фазі дають підставу вважати, що до конденсаційних перетворень причетні й хлорсилільні групи, здатні генерувати утворення силосанових містків за рахунок реакцій



Справедливість цього припущення обґрунтована в роботі [3] на основі порівняльного аналізу реакційної здатності хлорсилільних і силанольних груп при взаємодії з водою і групами SiOH. Істотне розширення спектра конденсаційних процесів за рахунок реакцій, наведених у схемі (1), забезпечує набагато вищий ступінь перетворення зв'язків Si-Cl і значно ефективніше твердофазне формування силосанового каркаса кінцевого полісилосану.

Певний надлишок води та гідроліз без попереднього охолодження одного з компонентів використовуваного в дослідках К.А. Андріанова, істотно змінюють умови структуроутворення в системі SiCl₄-H₂O, що відповідає переходу від твердофазного до рідкофазного синтезу кремнезему. Відзначимо, що початковий етап формування силосанових структур розпочинається в нейтральному середовищі, коли конденсаційні процеси за участю щойно утворених силанольних груп ефективно каталізуються аніонами гідроксилу [1,2]. Значна вихідна концентрація SiCl₄ зумовлює утворення множини олігомерних гідроксильованих хлоровмісних сполук із швидким пересиченням розчину і формуванням зародків твердої фази. Високі концентрації реагентів сприяють інтенсивному зростанню частинок кремнезему. Конкуруючим фактором є динамічне підкислення реакційного

середовища, що ініціює процеси деполімеризації полікремнієвих кислот та їхніх хлоропохідних [1]. Вплив цього фактора тим відчутніший, чим більша концентрація тетрахлориду кремнію, а отже й інтенсивність виділення хлороводню. За цих умов кінетика росту частинок твердої фази різко уповільнюється вже на початковому етапі їхнього утворення. Оскільки агрегативна стійкість золю швидко зменшується в сильно кислих розчинах, слід очікувати зростання ефективності агрегації мікрочастинок SiO₂, що має розпочинатися тим раніше, чим більше значення мольного співвідношення реагентів (m). Оскільки малі частинки кремнезему мають певну надлишкову поверхневу вільну енергію [6] (величина її антибатно змінюється з розміром частинок), процес їхньої агрегації отримує відповідний термодинамічний стимул, вплив якого істотно підвищує конденсаційну активність частинок. На підставі наведених міркувань можна дійти висновку, що утворювана внаслідок агрегації мікрочастинок SiO₂ матиме явно пористу структуру. Якщо знехтувати впливом потоку хлороводню, що інтенсивно виділяється на усіх стадіях гідролітично-конденсаційних перетворень, можна вважати, що ширина пор, сформованих при злипанні кремнезему, змінюється симбатно з їхнім розміром. У випадку висококонцентрованих сумішей SiCl₄-H₂O із швидкозростаючою густиною реакційного середовища інтенсивний потік бульбашок HCl відчутно перешкоджатиме щільній агрегації мікрочастинок, що мала би призвести до формування мікропористого SiO₂. Отже слід очікувати, що одержуваний за таких умов кремнезем матиме пористу структуру зі значно ширшим розподілом пор за розмірами, що дійсно продемонстровано в роботі

[3], в якій вивчався гідроліз SiCl_4 при стехіометричному співвідношенні компонентів. У менш концентрованих розчинах на умови упакування мікрочастинок, що агрегуються, значною мірою має впливати вода, що також здатна змінювати архітектуру агрегатів і перешкоджати максимально щільному упакуванню.

Проблематичність одержання непористого кремнезему з концентрованих сумішей $\text{SiCl}_4\text{-H}_2\text{O}$ не є незаперечною. Оригінальний шлях формування непористої структури SiO_2 запропоновано в роботі [3]. З огляду на велику швидкість процесів гідролізу зв'язків Si-Cl , поліконденсації та агрегації частинок SiO_2 при зростаючому дефіциті зшиваючих агентів та інтенсивному виділенні HCl , що в цілому зумовлюють пористу структуру кінцевого продукту, автор [3] для уповільнення стрімкої кінетики гідролізу та фазоутворення використав розчини соляної кислоти, що містять стехіометрично необхідну кількість води. Як уже відзначалося, початкові стадії гідролізу SiCl_4 водою розпочинаються за сприятливих умов нейтрального середовища і зародки твердої фази встигають сформуватися ще до сильного підкислення середовища, що спричиняло б суттєву деполімеризацію полікремнієвих кислот. Зовсім інший характер має початкова фаза гідролізу тетрахлориду кремнію в концентрованій соляній кислоті при гранично низьких значеннях рН. Висока кислотність середовища, окрім відомого уповільнення швидкості гідролітично-концентраційних перетворень, що відповідають за зростання довжини силоксанових ланцюгів, спричинятиме прискорення процесів деполімеризації [1,2]. Головною тенденцією початкового етапу структуроутворення має бути

формування ультрамікрочастинок та їхня швидка агрегація внаслідок низької агрегативної стійкості первинного колоїдного розчину кремнезему. Це дає підставу гадати, що кінцеві агрегати матимуть щільну структуру без відчутної пористості. Експериментальні дослідження гідролізу SiCl_4 в концентрованій соляній кислоті при стехіометричному співвідношенні компонентів, виконані в роботі [3], призвели до синтезу непористого кремнезему зі структурою кварцового скла.

Порівняно з рідкофазним синтезом кремнезему з тетрахлориду кремнію, пірогенний синтез SiO_2 має очевидну специфіку. Вона полягає, насамперед, у тому, що процес одержання SiO_2 реалізується в газовій фазі при високих температурах (1200-1300 К) за рахунок взаємодії SiCl_4 з компонентами воднево-повітряного полум'я [7]. На відміну від гетеролітичного характеру гідролітично-конденсаційних процесів рідкофазного синтезу кремнезему, в даному випадку дуже важливу структуроутворюючу роль відіграють гомолітичні реакції за участю радикальних компонентів полум'я. Велика кінетична енергія взаємодіючих частинок зумовлює непружний характер їхніх зіткнень і високу ефективність перебігу елементарних реакцій. До того ж загальновідомою є висока реакційна здатність радикалів, утворюваних у киснево-водневому полум'ї. Слід також відзначити ланцюговий характер реакції горіння, що забезпечує дуже швидке зростання концентрації радикалів і молекул H_2O , а також велику різноманітність каналів генерації силоксанових зв'язків, росту ланцюгових кремнієкисневих структур і струмку кінетику формування мікроглобул аеросилу. Головним чинником цього формування є

сукупність структуроутворюючих поверхневих реакцій, що відбуваються, найбільш ймовірно, за ударним механізмом, і дифузійні процеси з масопереносом, що суттєво активізуються при температурі Таммана¹ [6] і зумовлюють високу щільність мікрочастинок SiO₂. З термодинамічних міркувань глобули аеросилу за умов високої рухливості структурних елементів, забезпечуваної температурним режимом пірогенного синтезу, повинні мати сферичну форму, що відповідає експерименту.

При всій специфіці пірогенного одержання кремнезему в результатуючих процесах структуроутворення є немало подібного до тих, що реалізуються за умов рідкофазного гідролізу SiCl₄. Насамперед це стосується ряду гетеролітичних реакцій, участі хлорсилільних груп у конденсаційних перетвореннях типу (1). Процеси утворення силосанових зв'язків, росту кремнієкисневих ланцюгів в обох випадках можна описати однаковими сумарними реакціями. Первинні частинки твердої фази і в кремнеземі, одержуваному через рідкофазний синтез, сферичні й непористі [8]. Багато спільного є в будові й топографії гідроксильного покриття поверхні, яку можна змодельовати за допомогою граней (111), а також (100) елементарних комірок кристалічної модифікації кремнезему – β-кристоаліту. Аналогом агрегації SiO₂ в розчині є утворення агрегатів із глобул аеросилу (грити), що також відбувається за рахунок дії термодинамічного стимулу (необхідності зниження надлишкової поверхневої вільної енергії частинок за рахунок їхнього злипання).

¹ Температура Таммана для оксидів складає приблизно 0,6 від температури плавлення (для кремнезему вона близька до робочої температури пірогенного синтезу).

Слід, однак, відзначити певну внутрішню напруженість структури частинок пірогенного кремнезему, одержуваного в жорсткому термічному режимі. Такі напруження типові для тонких плівок, отриманих у газовій фазі [9]. Певна нерівноважність внутрішньої структури глобул аеросилу виявляється в процесах де- і регідратації поверхні через зміну лінійних розмірів цих глобул [10].

Таким чином, можна констатувати, що особливості будови кремнеземів, одержуваних рідкофазним і полум'яним гідролізом тетрахлориду кремнію, визначаються переважно сукупністю сумарних процесів структуроутворення, а синтезовані кремнеземи в структурно-хімічному аспекті близькі.

1. Айлер Р. Химия кремнезема: В 2 ч. – М.: Мир, 1982. – Ч.1,2. – 1127 с.
2. Шабанова Н.А. Кинетика поликонденсации в водных растворах кремниевых кислот //Коллоид. журн. – 1996. – Т.58. – №1. – С.115-122.
3. Миронюк І.Ф. Особливості солянокислотного гідролізу тетрахлориду кремнію //Укр. хім. журн. – 1999. – Т.65. – №2. – С.121-124.
4. Торопов И.А., Андреев И.Ф. Неорганические бескислородные соединения кремния. – Л.: Из-во ЛТИ им. Ленсовета, 1964. – 143 с.
5. Андрианов К.А. Кремнийорганические соединения. – М.: Госхимздат, 1955. – 520с.
6. Мейер К. Физико-химическая кристаллография. – М.: Металлургия, 1972. – 480 с.

7. Сушко Р.В. и др. О формировании поверхности аэросила в процессе пирогенного синтеза кремнезема //Адсорбция и адсорбенты. – 1977. – №5. – С.32-36.

8. Мицюк Б.М., Горогоцкая Л.И. Физико-химические превращения кремнезема в условиях метаморфизма. – К.: Наук. думка, 1980. – 234 с.

9. Натансон Х.С., Гольдберг Я. Применение тонких плёнок с топологической структурой в полупроводниковых устройствах //Физика тонких пленок. – Т.8. – М.: Мир, 1978. – С.264-356.

10. Исследование структурных изменений частиц кремнезема в процессе дегидратации и хемосорбции /В.М.Огенко, В.Т.Ивашечкин, А.А.Чуйко, И.Ф.Миронюк //Теорет. и эксперим. химия. – 1985. – Т.4. – №6. – С.745-748.

ЗМІСТ

МАТЕМАТИКА	
	3
Я.О.Баранецький, П.І.Каленюк, М.І.Копач, А.В.Копчук-Кашецький. Спектральні властивості нелокальної багатоточкової задачі для звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку	3
Г.П.Малицька. Про додатні розв'язки вироджених параболічних рівнянь	11
А.І.Казмерчук. Розв'язання задачі Рімана для однієї системи законів збереження	19
Н.І.Білусяк, Б.Й.Пташник. Задача з умовами типу умов Діріхле для слабконелінійних гіперболічних рівнянь	22
Р.І.Собкович. Проекційно-ітеративний метод у періодичній задачі з керуванням	33
М.М.Зарічний. Інваріантні суперрозширення компактних топологічних груп	40
Б.В.Атаманюк, О.М.Кузич. Збереження Q-многовидів при клітково-подібних відображеннях та менгеровських многовидів при UV^K відображеннях	51
Д.І.Боднар, Х.Й.Кучмінська. Дослідження збіжності двовимірних неперервних дробів	65
	75
ФІЗИКА	
	75
О.М.Возняк, Т.І.Луцишин, І.В.Дацьо. Енергетичний спектр граткових електронів із діагональним безладом у магнітному полі	75
Б.М.Рувінський, М.А.Рувінський. Вплив електричного і магнітного полів на процес ізотермічного відпалу у вакуумі тонких плівок PbS	85
Б.К.Остафійчук, В.М.Пилипів, В.І.Кравець. Моделювання структури поверхневого шару епітаксійних плівок залізо-ітрієвого гранату, імплантованих іонами бору	94
П.І.Мельник, Л.С.Кайкан. Роль поліморфних перетворень заліза в термодифузійних процесах	105

Л.Й.Межиловська, А.В.Лисак, Р.І.Запухляк, Г.Д.Матеїк, Р.Я.Михайльонка. Математичне моделювання впливу технологічних факторів вирощування і складу на електричні властивості тонких плівок твердих розчинів $A^{IV}B^{VI}$	113
Б.І.Яворський. Вплив ізоструктурного заміщення R-елемента в монокристалах $R_3Ga_5O_{12}$ на структуру валентної смуги	126

ХІМІЯ 134

М.В.Хабер, В.С.Курганський, Б.Л.Литвин, Л.Р.Олійник, Д.А.Чеверда, М.В.Панчошак. Стан і перспективи застосування оксидетильованих фосфоровмісних мастильно-охолоджувальних рідин у металообробці	134
С.Д.Максим'юк, Д.Я.Ставична, О.В.Шийчук. Вплив процесу фотостаріння на концентрацію розривів і зшивок у полістиролі	156
Д.М.Фреїк, В.М.Кланічка, В.В.Прокопів, О.В.Козич, Л.Р.Павлюк. Кристалохімічний аналіз термодинамічного n-p-переходу в кристалах PbSe при двотемпературному відпалі	167
І.Ф.Миронюк. Особливості формування структури кремнеземів, одержуваних гідролізом тетрахлориду кремнію	176

CONTENTS

MATHEMATICS 3

Ya.Baranetsky, P.Kaleniouk, M.Kopach, A.Kopchuk-Kashetsky. Spectral properties of a non-local multipoint problem for ordinary differential equations of the 4 th level	3
G.Malitska. Positive solutions of Cauchy problem for the degenerated parabolic equations of Kolmogorov type	11
A.Kazmerchuk. A solution of Riemann problem for one system of conservation Laws	19
M.Bilousiak, B.Ptashnyk. A problem of Dirichlet-type conditions for weak nonlinear hyperbolic equations	22
P.Sobkovych. A projectional-iterative method in solving a periodical problem with control	33
M.Zarichny. The invariant superextension of compact topological groups	40
B.Atamanyuk, O.Kouzych. The preservation of Q-manifolds and Menger manifolds during the acting of cell-like and UV^k maps	51
D.Bodnar, Chr.Kouchminska. A study of convergence criterion for two-dimensional continued fractions	65

PHYSICS 75

O.Voznyak, T.Loutyshyn, I.Datsio. A study of the lattice electrons energy spectrum with a diagonal disorder in the magnetic field	75
B.Ruvinsky, M. Ruvinsky. A study of electric and magnetic fields on the isothermal annealing under this PbS films vacuum	85
B.Ostafijchuk, V.Pylypiv, V.Kravets. B^{*} ion – implanted itrium-ion epitaxy films: a modelling of the presurface layer	94
P.Melnyk, L.Kaykan. On the role of polymorphous iron transformations in thermodiffusion processes	105
L.Mezhylovska, A.Lyssak, R.Zapoukhliak, G.Matehik R.Mikhailionka. Electric properties of rigid solution thin films $A^{IV}B^{VI}$: math modelling of growth and composition technological factors	113

- M.Khaber, V.Kourgansky, B.Lytvyn, L.Oliynyk, D.Cheverda, M.Panchoshak.** Lubricant-cool liquids in metal processing: prospects of their applications 134
- S.Maximiouk, D.Stavychna, O.Shiichuk.** A photoaging impact on the concentration of ruptures and crosslinks in polystyrene 156
- D.Freik, V.Klanichka, V.Prokopiv, O.Kozych, L.Pavliouk.** A crystallochemical analysis of thermodynamic n-p transition in PbSe crystals under two t^0 annealing 167
- I.Mironiuk.** Formation peculiarities of silica structure obtained by silicon tetrachloride hydrolysis 176

Міністерство освіти України
Прикарпатський університет імені В.Стефаника

ВІСНИК
Прикарпатського університету

МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА. ХІМІЯ.
1999. Випуск 1.

Видається з 1995 р.

Адреса редколегії: 284000, Івано-Франківськ,
вул. Шевченка, 57, тел. 2-33-79

Видавництво "Плаї"
Прикарпатського університету імені В. Стефаника

(Українською мовою)

Ministry of Education of Ukraine
Precarpathian University

NEWSLETTER
Precarpathian University

MATHEMATICS. PHYSICS. CHEMISTRY.
1999. Release 1.

Published since 1995

Publishers' address: 57, Shevtchenko Str.,
284000 Ivano-Frankivsk, tel. 2-33-79

PLAI Publishers,
Precarpathian University named after Vasyl Stefanyk

Головний редактор *О.П.Бойчук*
Літературний редактор *Н.О.Ясинська*
Коректура і комп'ютерна верстка *В.М.Дубовий*

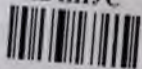
Друкується українською мовою.
Реєстраційне свідоцтво КВ №435.

Здано до набору 6.01.99. Підп. до друку 7.05.99 р. Формат 60x84/16. Папір офсетн. Літ. гарн. Ум. друк. арк. 12. Видав. арк. 12.24. Зам. 116. Тираж 300 прим.

Друкарня видавництва "Плаї" Прикарпатського університету.
284000 Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57.

5.00

НБ ПНУС



638471